Kapitel ADS:V

V. Suchen

- Binary Search Tree
- AVL Tree
- Red-Black Tree
- Maschinenmodell (Erweiterung)
- B-Tree

© POTTHAST 2019

Maschinenmodell (Erweiterung)

Sekundärspeicher

Die Verarbeitung großer Datenmengen erfordert Zugriffe auf Sekundärspeicher. Abhängig vom Speichermedium ist jeder Zugriff mit Latenz behaftet.

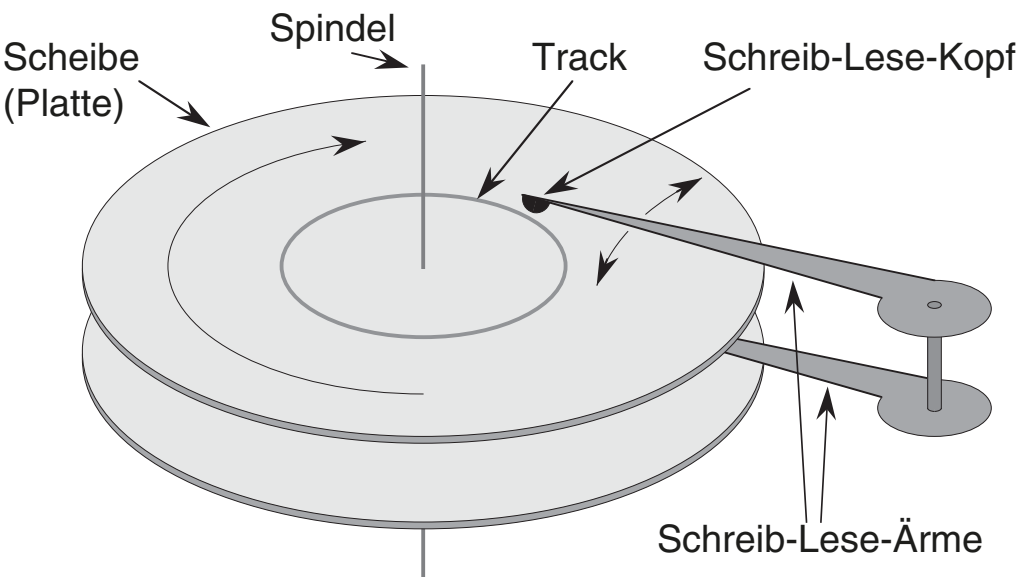
© POTTHAST 2019

Maschinenmodell (Erweiterung)

Sekundärspeicher

Die Verarbeitung großer Datenmengen erfordert Zugriffe auf Sekundärspeicher. Abhängig vom Speichermedium ist jeder Zugriff mit Latenz behaftet.

Beispiel:



Beim wahlfreien Zugriff auf eine rotierende Festplatte vergehen zwischen Anforderung und Antwort 1-10ms Latenzzeit.

© POTTHAST 2019

Maschinenmodell (Erweiterung)

Sekundärspeicher

Die Verarbeitung großer Datenmengen erfordert Zugriffe auf Sekundärspeicher. Abhängig vom Speichermedium ist jeder Zugriff mit Latenz behaftet.

Sekundärspeicher	**Latenz**
1 CPU cycle	0.3 ns
Level 1 cache access	0.9 ns
Level 2 cache access	2.8 ns
Level 3 cache access	12.9 ns
Main memory access (DDR4)	60 ns
Non-Volatile Memory (express)	10-20 μs
Solid-state disk I/O	50-150 μs
Rotational disk I/O	1-10 ms
Internet: SF to NYC	40 ms
Internet: SF to UK	81 ms
Internet: SF to Australia	183 ms
OS virtualization reboot	4 s
Hardware virtualization reboot	40 s
Physical system reboot	5 m

© POTTHAST 2019

Maschinenmodell (Erweiterung)

Sekundärspeicher

Die Verarbeitung großer Datenmengen erfordert Zugriffe auf Sekundärspeicher. Abhängig vom Speichermedium ist jeder Zugriff mit Latenz behaftet.

Sekundärspeicher	**Latenz**	**Analogie**
1 CPU cycle	0.3 ns	1 second
Level 1 cache access	0.9 ns	3 seconds
Level 2 cache access	2.8 ns	9 seconds
Level 3 cache access	12.9 ns	43 seconds
Main memory access (DDR4)	60 ns	3 minutes
Non-Volatile Memory (express)	10-20 μs	10-20 hours
Solid-state disk I/O	50-150 μs	2-6 days
Rotational disk I/O	1-10 ms	1-12 months
Internet: SF to NYC	40 ms	4 years
Internet: SF to UK	81 ms	8 years
Internet: SF to Australia	183 ms	19 years
OS virtualization reboot	4 s	423 years
Hardware virtualization reboot	40 s	4 millenia
Physical system reboot	5 m	32 millenia

© POTTHAST 2019

Bemerkungen:

- Aufstellungen dieser Art werden Peter Norvig [Norvig 1998] und Jim Gray [Gray 1999] zugeschrieben.
- Vorträge von Jeff Dean haben dafür gesorgt, dass sie unter dem inzwischen zu einem Informatiker-Meme avancierten Titel „Numbers Everyone Should Know“ neuerlich populär geworden sind [Dean 2009a] [Dean 2009b].
- Die gezeigte Aufstellung ist „Systems Performance: Enterprise and the Cloud“ von Brendan Gregg, bzw. einem Blogpost von Jeff Attwood zum Thema entlehnt [codinghorror.com].
- Wichtig ist bei diesen Latenzen nicht, ob jede individuelle Zahl exakt stimmt, die fortwährende Hardwareentwicklung sorgt ständig für Beschleunigungen. Vielmehr das Verhältnis der Latenzen verschiedener Technologieparadigmen zueinander ist entscheidend.
- In der Spalte „Analogie“ werden die Latenzen in leichter zu erfassende Größenordnungen umgerechnet, wobei ein CPU-Zyklus = 1 Sekunde als Referenz dient.

© POTTHAST 2019

Maschinenmodell (Erweiterung)

Sekundärspeicher

Ablauf eines Zugriffs:

1. Anforderung eines Datums von der Kontrolleinheit des Speichermediums.
2. Auslesen der Page, die das Datum enthält.
   Speichermedien organisieren Daten in Blöcken gleicher Größe, genannt Pages. Die Größe einer Page umfasst üblicherweise zwischen 2KB und 16KB.
3. Einfügen der Page in einen Cache.
   Zukünftige Zugriffe auf Daten in derselben Page werden drastisch beschleunigt und so die Gesamtlaufzeit amortisiert.
4. Extraktion und Rückgabe des angeforderten Datums aus der Page.

Annahmen:

- Der Hauptspeicher kann nur begrenzt viele Pages aufnehmen.
- Ein Hintergrundprozess entfernt nicht mehr benötigte Pages.
- Diese Logistik wird bei der Algorithmenanalyse nicht berücksichtigt.

© POTTHAST 2019

Maschinenmodell (Erweiterung)

Laufzeitanalyse

Pseudocode:

```
1. x = pointer to some object
2. read(x)
3. operations that access / modify x
4. write(x)
5. operations that access but do not modify x
```

Semantik:

1. Eine Kopie von x ist im Hauptspeicher und / oder im Sekundärspeicher.
2. Hilfsfunktion, die x vom Sekundärspeicher anfordert, wenn nötig; andernfalls benötigt sie keine Latenzzeit.
3. Normale CPU-Rechenzeit.
4. Hilfsfunktion, die x im Sekundärspeicher speichert, wenn nötig; andernfalls benötigt sie keine Latenzzeit.
5. Normale CPU-Rechenzeit.

© POTTHAST 2019

Maschinenmodell (Erweiterung)

Laufzeitanalyse

Bestandteile der Laufzeit eines Algorithmus mit Sekundärspeicherzugriffen:

- Rechenzeit: Summe der CPU-Rechenzeit gemäß RAM-Modell
  Jede primitive Anweisung wird mit konstanten Kosten c angesetzt.
- Latenzzeit: Summe der Wartezeit für Zugriffe auf Sekundärspeicher
  Jeder Zugriff wird mit konstanten Kosten c' angesetzt.

Oft gilt, dass die CPU ein vorliegendes Datum schneller verarbeitet als der Sekundärspeicher neue Daten nachliefern kann (Rechenzeit $\ll$ Latenzzeit).

➜ Rechenzeit und Latenzzeit werden getrennt voneinander betrachtet.
Beides wird durch Bachmann-Landau-Symbole als Funktion der Problemgröße n bemessen.

© POTTHAST 2019

B-Tree

Definition

Ein B-Tree ist ein gewurzelter Baum mit folgenden vier Eigenschaften:

1. Jeder Knoten x hat folgende Attribute:
   (a) $x.n$: Zahl der Sortierschlüssel, die x aktuell speichert.
   (b) $x.n$ Sortierschlüssel $x.\mathit{key}_1, \ldots, x.\mathit{key}_{x.n}$, so dass $x.\mathit{key}_1 \leq \ldots \leq x.\mathit{key}_{x.n}$.
   (c) $x.\mathit{leaf}$: Boolean-Flag, das *TRUE* ist, wenn x ein Blatt ist, sonst *FALSE*.
   (d) $x.n + 1$ Pointer $x.c_1, \ldots, x.c_{x.n+1}$ zu Kindern (ausgenommen Blätter).

© POTTHAST 2019

B-Tree

Definition

Ein B-Tree ist ein gewurzelter Baum mit folgenden vier Eigenschaften:

1. Jeder Knoten x hat folgende Attribute:
   (a) $x.n$: Zahl der Sortierschlüssel, die x aktuell speichert.
   (b) $x.n$ Sortierschlüssel $x.\mathit{key}_1, \ldots, x.\mathit{key}_{x.n}$, so dass $x.\mathit{key}_1 \leq \ldots \leq x.\mathit{key}_{x.n}$.
   (c) $x.\mathit{leaf}$: Boolean-Flag, das *TRUE* ist, wenn x ein Blatt ist, sonst *FALSE*.
   (d) $x.n + 1$ Pointer $x.c_1, \ldots, x.c_{x.n+1}$ zu Kindern (ausgenommen Blätter).
2. Die Schlüssel von x definieren Intervalle von Schlüsseln, die im jeweiligen Teilbaum gespeichert werden: Sei k_i ein in Teilbaum $x.c_i$ gespeicherter Schlüssel, dann gilt $k_1 \leq x.\mathit{key}_1 \leq k_2 \leq x.\mathit{key}_2 \leq \ldots \leq x.\mathit{key}_{x.n+1} \leq k_{x.n+1}$.

© POTTHAST 2019

B-Tree

Definition

Ein B-Tree ist ein gewurzelter Baum mit folgenden vier Eigenschaften:

1. Jeder Knoten x hat folgende Attribute:
   (a) $x.n$: Zahl der Sortierschlüssel, die x aktuell speichert.
   (b) $x.n$ Sortierschlüssel $x.\mathit{key}_1, \ldots, x.\mathit{key}_{x.n}$, so dass $x.\mathit{key}_1 \leq \ldots \leq x.\mathit{key}_{x.n}$.
   (c) $x.\mathit{leaf}$: Boolean-Flag, das *TRUE* ist, wenn x ein Blatt ist, sonst *FALSE*.
   (d) $x.n + 1$ Pointer $x.c_1, \ldots, x.c_{x.n+1}$ zu Kindern (ausgenommen Blätter).
2. Die Schlüssel von x definieren Intervalle von Schlüsseln, die im jeweiligen Teilbaum gespeichert werden: Sei k_i ein in Teilbaum $x.c_i$ gespeicherter Schlüssel, dann gilt $k_1 \leq x.\mathit{key}_1 \leq k_2 \leq x.\mathit{key}_2 \leq \ldots \leq x.\mathit{key}_{x.n+1} \leq k_{x.n+1}$.
3. Alle Blätter haben dieselbe Tiefe, entsprechend der Höhe h des Baums.

© POTTHAST 2019

B-Tree

Definition

Ein B-Tree ist ein gewurzelter Baum mit folgenden vier Eigenschaften:

1. Jeder Knoten x hat folgende Attribute:
   (a) $x.n$: Zahl der Sortierschlüssel, die x aktuell speichert.
   (b) $x.n$ Sortierschlüssel $x.\mathit{key}_1, \ldots, x.\mathit{key}_{x.n}$, so dass $x.\mathit{key}_1 \leq \ldots \leq x.\mathit{key}_{x.n}$.
   (c) $x.\mathit{leaf}$: Boolean-Flag, das *TRUE* ist, wenn x ein Blatt ist, sonst *FALSE*.
   (d) $x.n + 1$ Pointer $x.c_1, \ldots, x.c_{x.n+1}$ zu Kindern (ausgenommen Blätter).
2. Die Schlüssel von x definieren Intervalle von Schlüsseln, die im jeweiligen Teilbaum gespeichert werden: Sei k_i ein in Teilbaum $x.c_i$ gespeicherter Schlüssel, dann gilt $k_1 \leq x.\mathit{key}_1 \leq k_2 \leq x.\mathit{key}_2 \leq \ldots \leq x.\mathit{key}_{x.n+1} \leq k_{x.n+1}$.
3. Alle Blätter haben dieselbe Tiefe, entsprechend der Höhe h des Baums.
4. Die Zahl der Schlüssel $x.n$ eines Knotens ist beidseitig beschränkt. Sei $t \geq 2$:
   (a) Die Wurzel eines nicht-leeren Baums hat mindestens einen Schlüssel.
   (b) Jeder Knoten (außer der Wurzel) hat mindestens $t - 1$ Schlüssel.
   (c) Jeder Knoten hat höchstens $2t - 1$ Schlüssel.

© POTTHAST 2019

Bemerkungen:

- Der B-Baum wurde 1972 von Rudolf Bayer und Edward M. McCreight entwickelt. Er erwies sich als ideale Datenstruktur zur Verwaltung von Indizes für das relationale Datenbankmodell, das 1970 von Edgar F. Codd entwickelt wurde. Diese Kombination führte zur Entwicklung des ersten SQL-Datenbanksystems System R bei IBM.

  Die Erfinder lieferten keine Erklärung über die Herkunft des Namens B-Baum. Die häufigste Interpretation ist, dass B für balanciert steht. Weitere Interpretationen sind B für Bayer, Barbara (nach seiner Frau), Broad, "Busch", Bushy, Boeing, da Rudolf Bayer für Boeing Scientific Research Labs gearbeitet hat, Banyanbaum, ein Baum bei dem Äste und Wurzeln ein Netz erstellen oder binär aufgrund der ausgeführten binären Suche innerhalb eines Knotens. [Wikipedia]

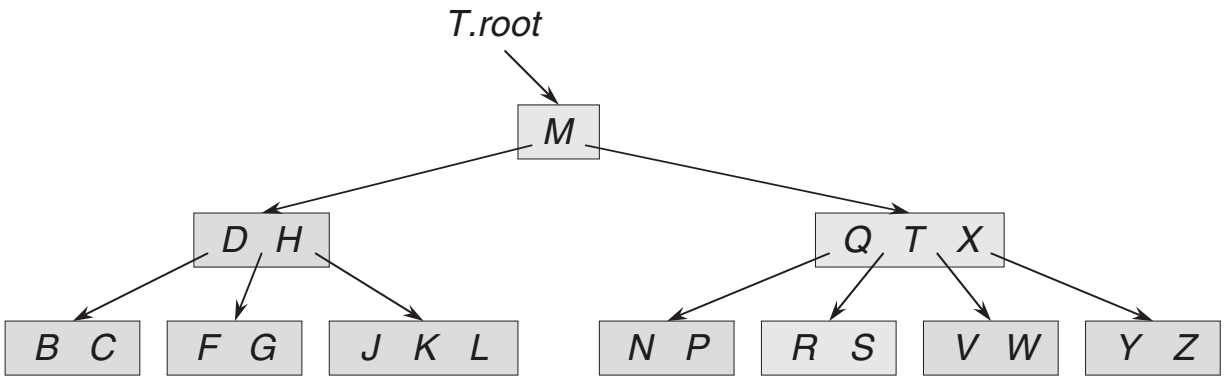
- Beachten Sie, dass B-Trees hier als Out-Trees modelliert sind; Knoten haben kein Elter-Attribut.

© POTTHAST 2019

B-Tree

Definition

Beispiele:

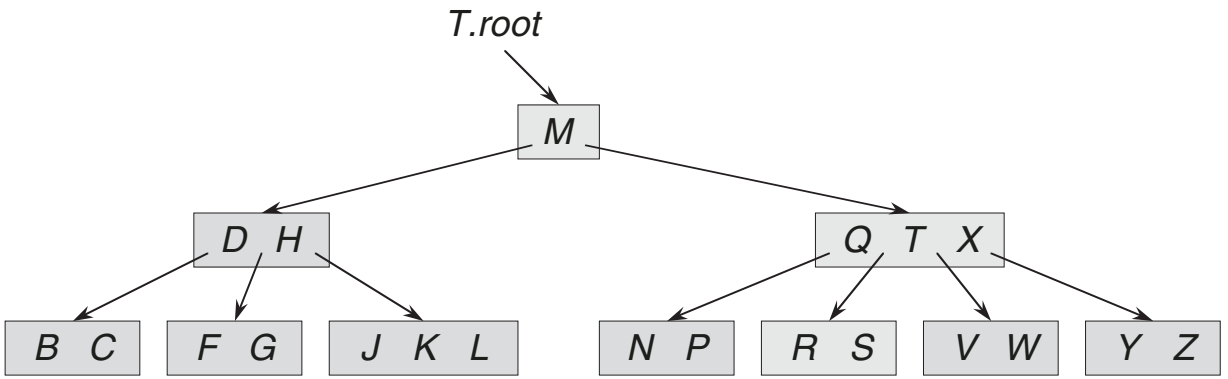


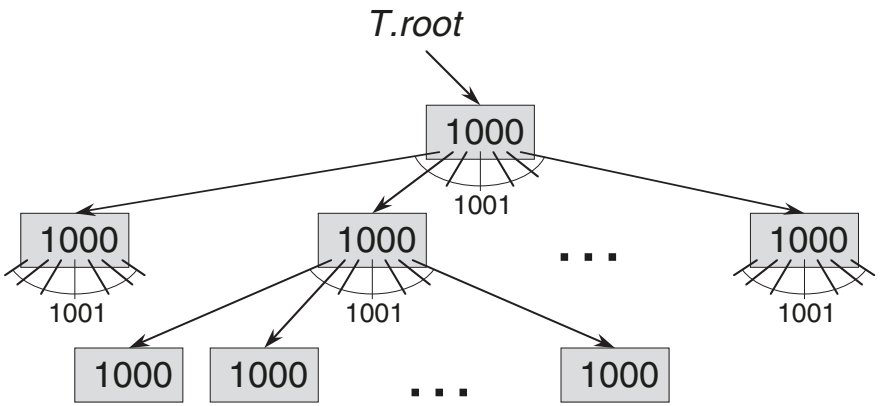
© POTTHAST 2019

B-Tree

Definition

Beispiele:





© POTTHAST 2019

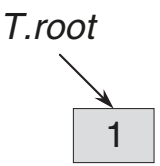
B-Tree

Satz 1

Für einen B-Tree T der Höhe h mit n Schlüsseln und minimalem Knotengrad $t \geq 2$ gilt

$$h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$$

Beweis:



Tiefe	Knoten
0	1

© POTTHAST 2019

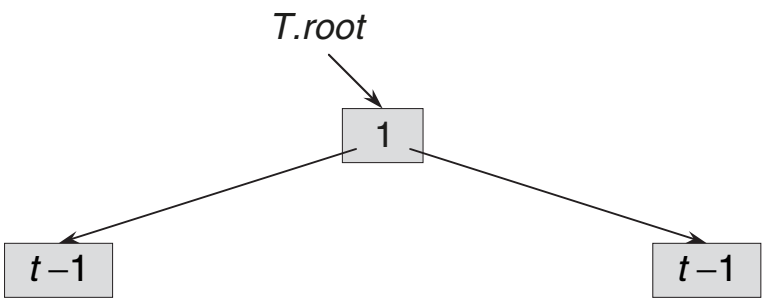
B-Tree

Satz 1

Für einen B-Tree T der Höhe h mit n Schlüsseln und minimalem Knotengrad $t \geq 2$ gilt

$$h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$$

Beweis:



Tiefe	Knoten
0	1
1	2

© POTTHAST 2019

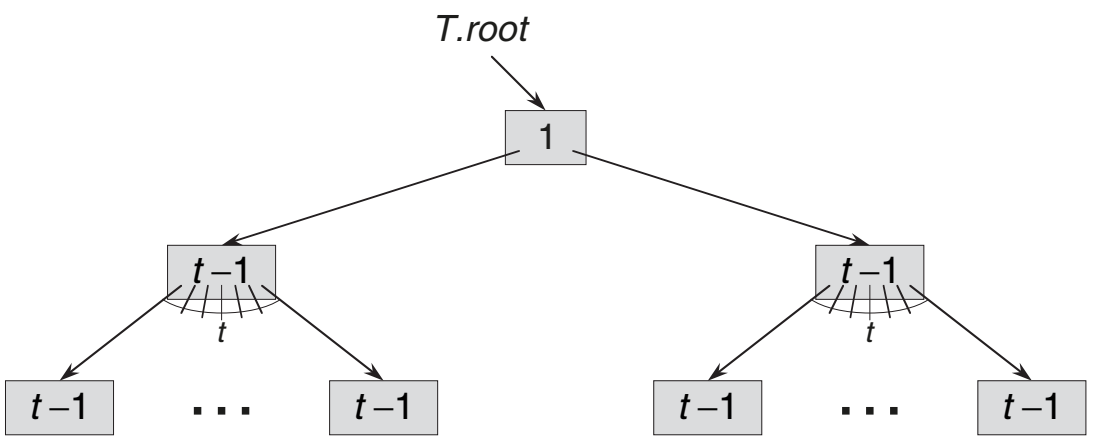
B-Tree

Satz 1

Für einen B-Tree T der Höhe h mit n Schlüsseln und minimalem Knotengrad $t \geq 2$ gilt

$$h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$$

Beweis:



Tiefe	Knoten
0	1
1	2
2	$2t$

© POTTHAST 2019

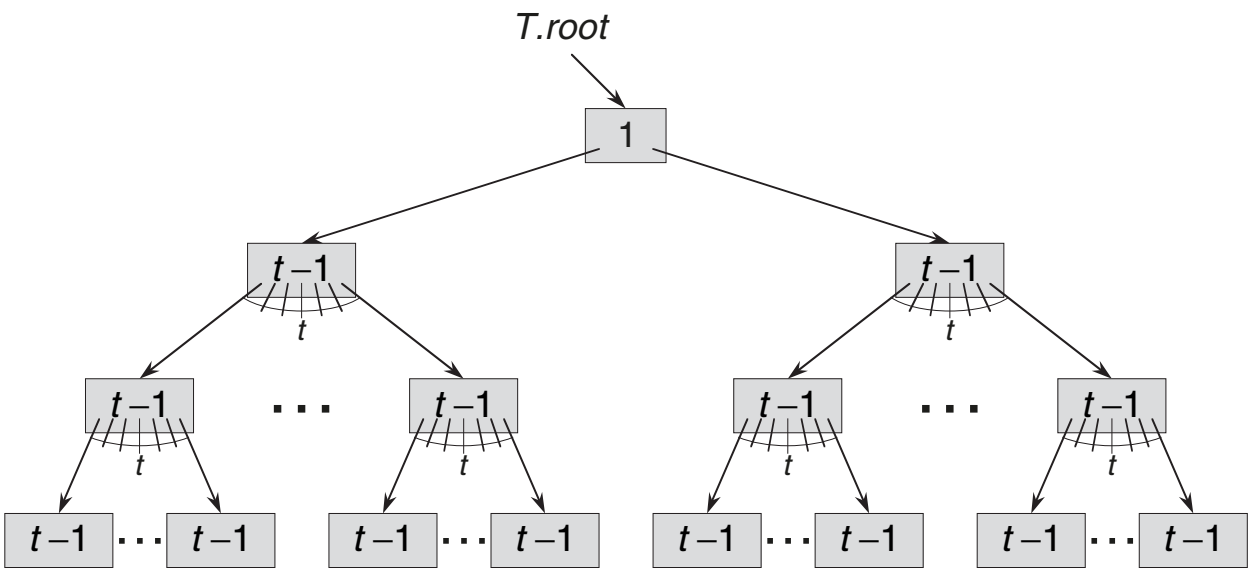
B-Tree

Satz 1

Für einen B-Tree T der Höhe h mit n Schlüsseln und minimalem Knotengrad $t \geq 2$ gilt

$$h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$$

Beweis:



Tiefe	Knoten
0	1
1	2
2	$2t$
3	$2t^2$
	$= 2\,t^{h-1}$

© POTTHAST 2019

B-Tree

Satz 1

Für einen B-Tree T der Höhe h mit n Schlüsseln und minimalem Knotengrad $t \geq 2$ gilt

$$h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$$

Beweis:

Sei $n(h)$ die Zahl der Schlüssel in einem B-Tree der Höhe h:

$$n(h) \;\geq\; 1 + (t-1) \sum_{i=1}^{h} 2t^{i-1}$$

© POTTHAST 2019

B-Tree

Satz 1

Für einen B-Tree T der Höhe h mit n Schlüsseln und minimalem Knotengrad $t \geq 2$ gilt

$$h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$$

Beweis:

Sei $n(h)$ die Zahl der Schlüssel in einem B-Tree der Höhe h:

$$\begin{aligned} n(h) &\geq 1 + (t-1) \sum_{i=1}^{h} 2t^{i-1} \\ &= 1 + 2(t-1) \left(\frac{t^h - 1}{t-1} \right) \\ &= 2t^h - 1 \end{aligned}$$

© POTTHAST 2019

B-Tree

Satz 1

Für einen B-Tree T der Höhe h mit n Schlüsseln und minimalem Knotengrad $t \geq 2$ gilt

$$h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$$

Beweis:

Sei $n(h)$ die Zahl der Schlüssel in einem B-Tree der Höhe h:

$$\begin{aligned}
n(h) &\geq 1 + (t-1) \sum_{i=1}^{h} 2t^{i-1} \\
&= 1 + 2(t-1) \left(\frac{t^h - 1}{t-1} \right) \\
&= 2t^h - 1 \\
\Leftrightarrow \quad t^h &\geq \frac{n(h)+1}{2} \\
\Leftrightarrow \quad h &\geq \log_t \frac{n(h)+1}{2} \quad \square
\end{aligned}$$

© POTTHAST 2019

B-Tree

Konstruktion

Algorithmus: B-Tree Create.

Eingabe: keine

Ausgabe: Initialisierter B-Tree T ohne Schlüssel.

BTreeCreate()

1. $T = \textit{tree}()$
2. $x = \textit{node}()$
3. $x.\textit{leaf} = \textit{TRUE}$
4. $x.n = 0$
5. $\textit{write}(x)$
6. $T.\textit{root} = x$
7. $\textit{return}(T)$

Hilfsfunktionen:

- *tree* alloziert ein Objekt im Hauptspeicher, das den Baum T repräsentiert.
- *node* alloziert ein Objekt im Hauptspeicher, das einen Knoten repräsentiert.

Laufzeit:

- Latenzzeit: $O(1)$
- Rechenzeit: $O(1)$

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation

- Schlüssel in Sortierreihenfolge besuchen
  Traversierung des Baumes mit DFS-Traverse (in-order; angepasst für k-näre Bäume).
- Schlüssel suchen (*Search*)
  Einen Knoten mit vorgegebenem Schlüssel suchen.
- Schlüssel einfügen (*Insert*)
  Einen Knoten an der richtigen Stelle im Baum einfügen.
- Schlüssel löschen (*Delete*)
  Einen bestimmten Knoten aus dem Baum löschen.

Konventionen:

- Die Wurzel eines B-Tree befindet sich immer im Hauptspeicher.
- Als Parameter übergebene Knoten müssen vorher in den Hauptspeicher geladen worden sein.

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Suche

Algorithmus: B-Tree Search.

Eingabe: x. Wurzel eines B-Tree T.
k. Gesuchter Schlüssel.

Ausgabe: Tupel (y, i), wobei y ein Knoten ist, so dass $y.\mathit{key}_i = k$, oder *NIL*.

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Suche

Algorithmus: B-Tree Search.

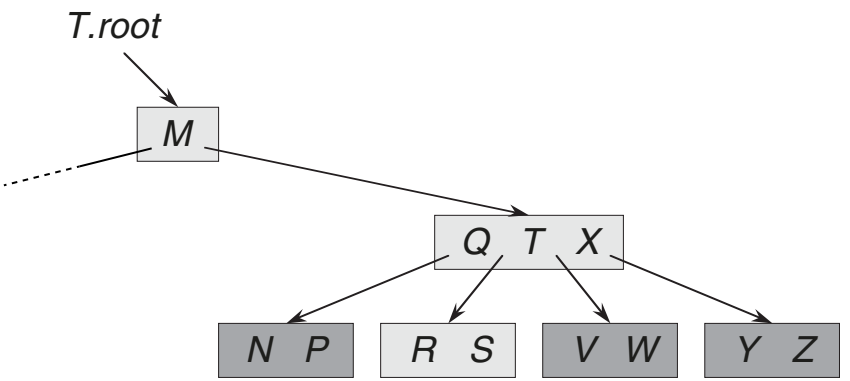
Eingabe: x. Wurzel eines B-Tree T.
k. Gesuchter Schlüssel.

Ausgabe: Tupel (y, i), wobei y ein Knoten ist, so dass $y.key_i = k$, oder *NIL*.

BTreeSearch(x, k)

```
1.  i = 1
2.  WHILE i ≤ x.n AND k > x.key_i DO
3.     i = i + 1
4.  ENDDO
5.  IF i < x.n AND k == x.key_i THEN
6.     return(x, i)
7.  ELSE IF x.leaf THEN
8.     return(NIL)
9.  ELSE
10.    read(x.c_i)
11.    return(BTreeSearch(x.c_i, k))
12. ENDIF
```

Beispiel: *BTreeSearch*$(T.root, R)$



© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Suche

Algorithmus: B-Tree Search.

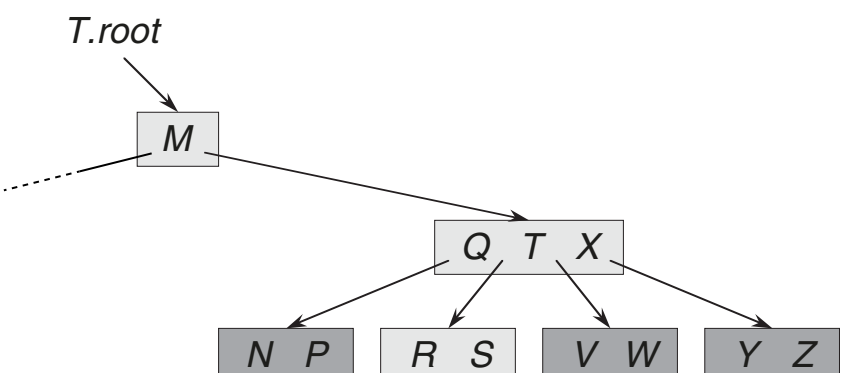
Eingabe: x. Wurzel eines B-Tree T.
k. Gesuchter Schlüssel.

Ausgabe: Tupel (y, i), wobei y ein Knoten ist, so dass $y.key_i = k$, oder *NIL*.

BTreeSearch(x, k)

```
1.  i = 1
2.  WHILE i ≤ x.n AND k > x.key_i DO
3.     i = i + 1
4.  ENDDO
5.  IF i < x.n AND k == x.key_i THEN
6.     return(x, i)
7.  ELSE IF x.leaf THEN
8.     return(NIL)
9.  ELSE
10.    read(x.c_i)
11.    return(BTreeSearch(x.c_i, k))
12. ENDIF
```

Beispiel: *BTreeSearch*$(T.root, R)$



Laufzeit

- Latenzzeit: $O(h) = O(\log_t n)$
- Rechenzeit: $O(th) = O(t \log_t n)$

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Einfügen

Algorithmus: B-Tree Insert.

Eingabe: T. B-Tree.
k. Einzufügender Schlüssel.

Ausgabe: Um k erweiterter B-Tree.

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Einfügen

Algorithmus: B-Tree Insert.

Eingabe: T. B-Tree.
k. Einzufügender Schlüssel.

Ausgabe: Um k erweiterter B-Tree.

Vorüberlegungen:

- Es gibt keine 1:1-Korrespondenz zwischen Schlüsseln und Knoten.
  Ein Knoten hat zwischen $t-1$ und $2t-1$ Schlüssel.
- k wird im passenden Blattknoten hinzugefügt, solange Platz ist.
  Beim Einfügen muss die Sortierreihenfolge beachtet werden.
- Wenn ein Blatt voll ist, darf kein neues Kind erzeugt werden.
  Gemäß Bedingung 3 müssen alle Blätter auf derselben Ebene sein.
- Volle Blattknoten werden geteilt; zwei neue Blattknoten entstehen.
  Der Median-Schlüssel wird dem Elter hinzugefügt, um die neuen Blätter zu unterscheiden.
- Die Teilung eines Blattes kann die Teilung des (vollen) Elters erfordern.
  Statt darauf zu warten, wird ein Knoten „im Vorbeigehen“ geteilt, falls er voll ist.

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Einfügen

Algorithmus: B-Tree Insert.

Eingabe: T. B-Tree.
k. Einzufügender Schlüssel.

Ausgabe: Um k erweiterter B-Tree.

BTreeInsert(T, k)

```
r = T.root
IF r.n == 2t − 1 THEN
   s = node()
   T.root = s
   s.leaf = FALSE
   s.n = 0
   s.c_1 = r
   BTreeSplitChild(s, 1)
   BTreeInsertNonfull(s, k)
ELSE
   BTreeInsertNonfull(r, k)
ENDIF
```

Vorgehen:

- Sonderfall: Wurzel voll
  - Neue Wurzel erzeugen
  - Alte Wurzel teilen
  - Rekursiv fortfahren
- Sonst: Rekursiv fortfahren

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Einfügen

Algorithmus: B-Tree Split Child.

Eingabe: x. Teilbaum eines B-Tree mit Wurzel x.
i. Index des zu teilenden Kindes von x, das $2t - 1$ Schlüssel enthält.

Ausgabe: B-Tree mit Wurzel x, dessen i-tes Kind geteilt ist.

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Einfügen

Algorithmus: B-Tree Split Child.

Eingabe: x. Teilbaum eines B-Tree mit Wurzel x.
i. Index des zu teilenden Kindes von x, das $2t - 1$ Schlüssel enthält.

Ausgabe: B-Tree mit Wurzel x, dessen i-tes Kind geteilt ist.

Vorgehen:

- Sei y das zu teilende i-te Kind von x.
- Sei z ein neuer Knoten, der die Hälfte von ys Schlüssen aufnehmen soll.
- Kopiere die hinteren $t - 1$ Schlüssel und t Knoten von y nach z.
- Setze ys Schlüsselzähler zurück auf $t - 1$.
  Die vorigen Einträge $> t - 1$ werden nicht überschrieben.
- Schaffe Platz für z als neues Kind in x, rechts neben y.
- Schaffe Platz für ys t-ten Schlüssel als neuen i-ten Schlüssel von x.
- Schreibe x, y und z in den Sekundärspeicher.

© POTTHAST 2019

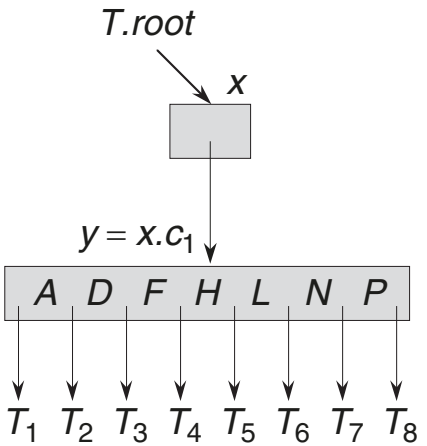
B-Tree

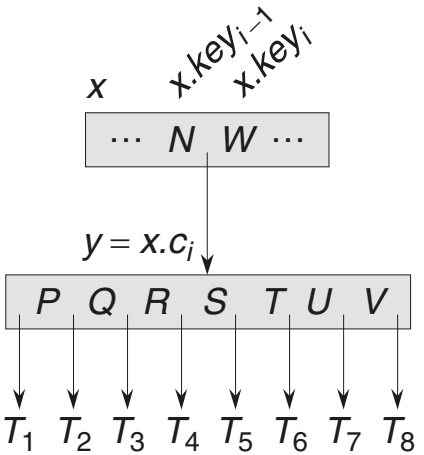
Manipulation: Einfügen

BTreeSplitChild(x, i)

```
1.  y = x.c_i
2.  z = node()
3.  z.leaf = y.leaf
4.  z.n = t − 1
5.  FOR j = 1 TO t − 1 DO
6.    z.key_j = y.key_{j+t}
7.  ENDDO
8.  IF NOT y.leaf THEN
9.    FOR j = 1 TO t DO
10.     z.c_j = y.c_{j+t}
11.   ENDDO
12. ENDIF
13. y.n = t − 1
14. FOR j = x.n + 1 DOWNTO i + 1 DO
15.   x.c_{j+1} = x.c_j
16. ENDDO
17. x.c_{i+1} = z
18. FOR j = x.n DOWNTO i DO
19.   x.key_{j+1} = x.key_j
20. ENDDO
21. x.key_i = y.key_t
22. x.n = x.n + 1
23. write(x); write(y); write(z)
```

Fälle: (t=4)





© POTTHAST 2019

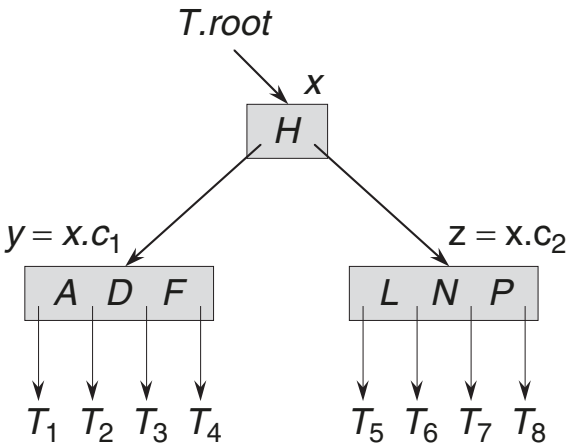
B-Tree

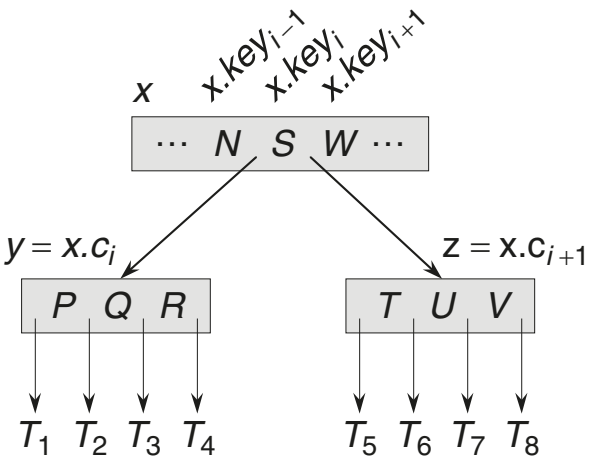
Manipulation: Einfügen

BTreeSplitChild(x, i)

```
1.  y = x.c_i
2.  z = node()
3.  z.leaf = y.leaf
4.  z.n = t − 1
5.  FOR j = 1 TO t − 1 DO
6.    z.key_j = y.key_{j+t}
7.  ENDDO
8.  IF NOT y.leaf THEN
9.    FOR j = 1 TO t DO
10.     z.c_j = y.c_{j+t}
11.   ENDDO
12. ENDIF
13. y.n = t − 1
14. FOR j = x.n + 1 DOWNTO i + 1 DO
15.   x.c_{j+1} = x.c_j
16. ENDDO
17. x.c_{i+1} = z
18. FOR j = x.n DOWNTO i DO
19.   x.key_{j+1} = x.key_j
20. ENDDO
21. x.key_i = y.key_t
22. x.n = x.n + 1
23. write(x); write(y); write(z)
```

Fälle: (t=4)





© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Einfügen

Algorithmus: B-Tree Insert Nonfull.

Eingabe: x. Teilbaum eines B-Tree mit Wurzel x.
k. Einzufügender Schlüssel.

Ausgabe: Um k erweiterter B-Tree.

Fallunterscheidung:

1. x ist ein Blatt: (x ist nicht voll; siehe Fall 2)
   - Verschiebe alle Schlüssel $> k$ um eine Indexposition nach rechts.
   - Füge k an die freie Stelle ein und aktualisiere die Zahl der Schlüssel.
   - Schreibe x in den Sekundärspeicher.
2. x ist ein innerer Knoten:
   - Suche den Index i des Kindes von x, in dessen Teilbaum k einzufügen ist.
   - Lese $x.c_i$ aus dem Sekundärspeicher.
   - Falls $x.c_i$ voll ist, teile den Knoten; fahre rekursiv bei $x.c_i$ fort.

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Einfügen

Algorithmus: B-Tree Insert Nonfull.

Eingabe: x. Teilbaum eines B-Tree mit Wurzel x.
k. Einzufügender Schlüssel.

Ausgabe: Um k erweiterter B-Tree.

Fallunterscheidung:

1. x ist ein Blatt: (x ist nicht voll; siehe Fall 2)
   - Verschiebe alle Schlüssel $> k$ um eine Indexposition nach rechts.
   - Füge k an die freie Stelle ein und aktualisiere die Zahl der Schlüssel.
   - Schreibe x in den Sekundärspeicher.
2. x ist ein innerer Knoten:
   - Suche den Index i des Kindes von x, in dessen Teilbaum k einzufügen ist.
   - Lese $x.c_i$ aus dem Sekundärspeicher.
   - Falls $x.c_i$ voll ist, teile den Knoten; fahre rekursiv bei $x.c_i$ fort.

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Einfügen

Algorithmus: B-Tree Insert Nonfull.

Eingabe: x. Teilbaum eines B-Tree mit Wurzel x.
k. Einzufügender Schlüssel.

Ausgabe: Um k erweiterter B-Tree.

Fallunterscheidung:

1. x ist ein Blatt: (x ist nicht voll; siehe Fall 2)
   - Verschiebe alle Schlüssel $> k$ um eine Indexposition nach rechts.
   - Füge k an die freie Stelle ein und aktualisiere die Zahl der Schlüssel.
   - Schreibe x in den Sekundärspeicher.
2. x ist ein innerer Knoten:
   - Suche den Index i des Kindes von x, in dessen Teilbaum k einzufügen ist.
   - Lese $x.c_i$ aus dem Sekundärspeicher.
   - Falls $x.c_i$ voll ist, teile den Knoten; fahre rekursiv bei $x.c_i$ fort.

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Einfügen

BTreeInsertNonfull(x, k)

```
1.  i = x.n
2.  IF x.leaf THEN
3.    WHILE i ≥ 1 AND k < x.key_i DO
4.      x.key_{i+1} = x.key_i
5.      i = i − 1
6.    ENDDO
7.    x.key_{i+1} = k
8.    x.n = x.n + 1
9.    write(x)
10. ELSE
11.   WHILE i ≥ 1 AND k < x.key_i DO
12.     i = i − 1
13.   ENDDO
14.   i = i + 1
15.   read(x.c_i)
16.   IF x.c_i.n == 2t − 1 THEN
17.     BTreeSplitChild(x, i)
18.     IF k > x.key_i THEN
19.       i = i + 1
20.     ENDIF
21.   ENDIF
22.   BTreeInsertNonfull(x.c_i, k)
23. ENDIF
```


© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Einfügen

BTreeInsertNonfull(x, k)

```
1.  i = x.n
2.  IF x.leaf THEN
3.    WHILE i ≥ 1 AND k < x.key_i DO
4.      x.key_{i+1} = x.key_i
5.      i = i − 1
6.    ENDDO
7.    x.key_{i+1} = k
8.    x.n = x.n + 1
9.    write(x)
10. ELSE
11.   WHILE i ≥ 1 AND k < x.key_i DO
12.     i = i − 1
13.   ENDDO
14.   i = i + 1
15.   read(x.c_i)
16.   IF x.c_i.n == 2t − 1 THEN
17.     BTreeSplitChild(x, i)
18.     IF k > x.key_i THEN
19.       i = i + 1
20.     ENDIF
21.   ENDIF
22.   BTreeInsertNonfull(x.c_i, k)
23. ENDIF
```


© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Einfügen

BTreeInsertNonfull(x, k)

```
 1.  i = x.n
 2.  IF x.leaf THEN
 3.    WHILE i ≥ 1 AND k < x.key_i DO
 4.      x.key_{i+1} = x.key_i
 5.      i = i − 1
 6.    ENDDO
 7.    x.key_{i+1} = k
 8.    x.n = x.n + 1
 9.    write(x)
10.  ELSE
11.    WHILE i ≥ 1 AND k < x.key_i DO
12.      i = i − 1
13.    ENDDO
14.    i = i + 1
15.    read(x.c_i)
16.    IF x.c_i.n == 2t − 1 THEN
17.      BTreeSplitChild(x, i)
18.      IF k > x.key_i THEN
19.        i = i + 1
20.      ENDIF
21.    ENDIF
22.    BTreeInsertNonfull(x.c_i, k)
23.  ENDIF
```


© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Einfügen

BTreeInsertNonfull(x, k)

```
1.  i = x.n
2.  IF x.leaf THEN
3.    WHILE i ≥ 1 AND k < x.key_i DO
4.      x.key_{i+1} = x.key_i
5.      i = i − 1
6.    ENDDO
7.    x.key_{i+1} = k
8.    x.n = x.n + 1
9.    write(x)
10. ELSE
11.   WHILE i ≥ 1 AND k < x.key_i DO
12.     i = i − 1
13.   ENDDO
14.   i = i + 1
15.   read(x.c_i)
16.   IF x.c_i.n == 2t − 1 THEN
17.     BTreeSplitChild(x, i)
18.     IF k > x.key_i THEN
19.       i = i + 1
20.     ENDIF
21.   ENDIF
22.   BTreeInsertNonfull(x.c_i, k)
23. ENDIF
```

Beobachtungen:

- Knotenteilung ist die einzige Ursache für Wachstum der Höhe.
- Ein B-Tree wird nur an der Wurzel erhöht.

Laufzeit:

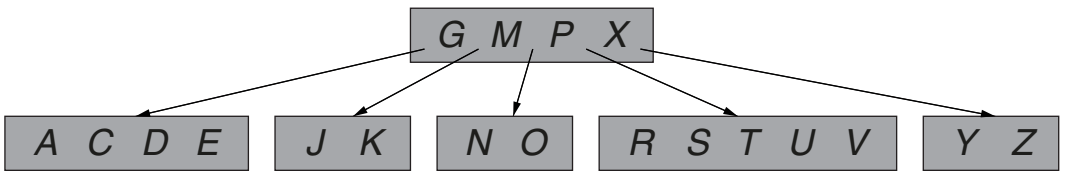
- Latenzzeit: $O(h) = O(\log_t n)$
- Rechenzeit: $O(th) = O(t \log_t n)$

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Einfügen

Beispiel: (t=3)



Nächste Operation:

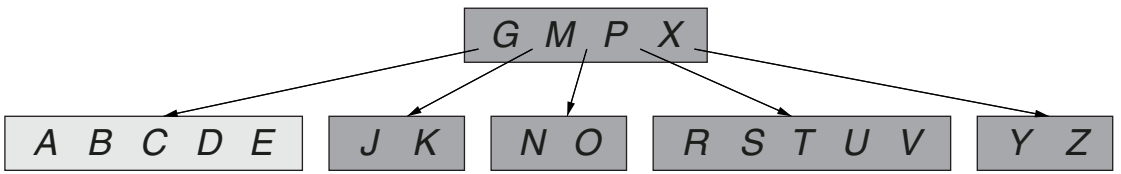
- B einfügen

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Einfügen

Beispiel: (t=3)



Nächste Operation:

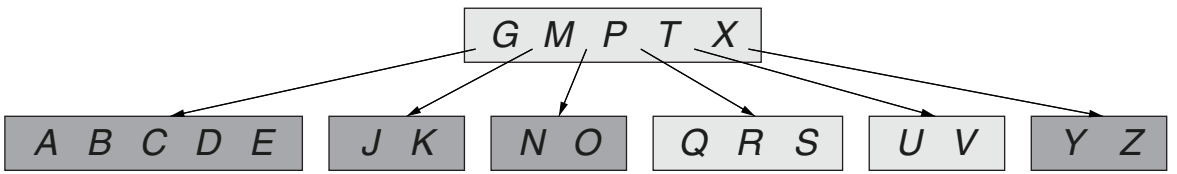
- B einfügen
  B wird in Blatt $ACDE$ eingefügt.
- Q einfügen

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Einfügen

Beispiel: (t=3)



Nächste Operation:

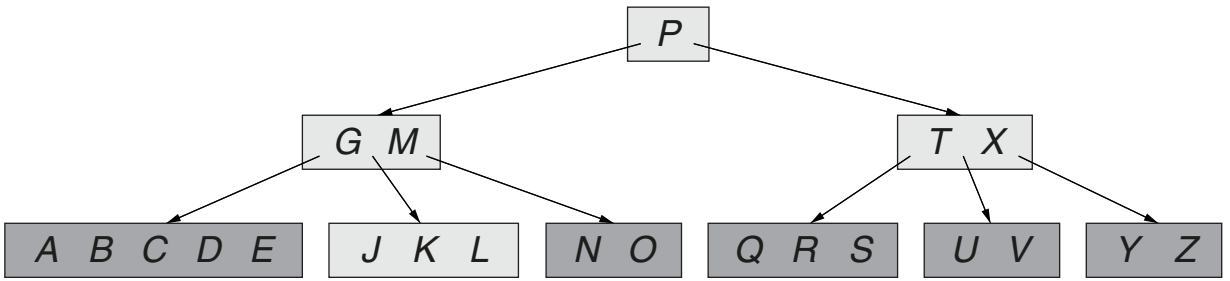
- B einfügen
  B wird in Blatt $ACDE$ eingefügt.
- Q einfügen
  Blatt $RSTUV$ ist voll und wird geteilt in RS und UV, wobei T zur Wurzel hinzugefügt wird. Q wird daraufhin in Blatt RS hinzugefügt.
- L einfügen

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Einfügen

Beispiel: (t=3)



Nächste Operation:

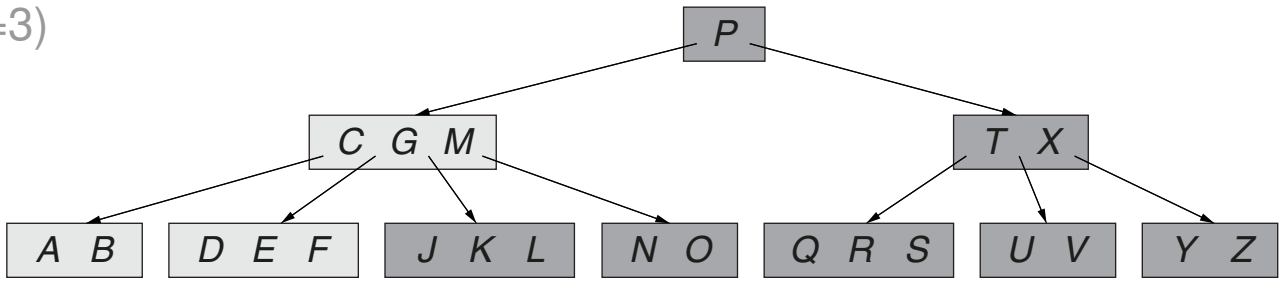
- B einfügen
  B wird in Blatt $ACDE$ eingefügt.
- Q einfügen
  Blatt $RSTUV$ ist voll und wird geteilt in RS und UV, wobei T zur Wurzel hinzugefügt wird. Q wird daraufhin in Blatt RS hinzugefügt.
- L einfügen
  Die Wurzel ist voll und wird geteilt in GM und TX, wobei P die neue Wurzel wird. L wird daraufhin in Blatt JK eingefügt.
- F einfügen

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Einfügen

Beispiel: (t=3)



Nächste Operation:

- B einfügen
  B wird in Blatt $ACDE$ eingefügt.
- Q einfügen
  Blatt $RSTUV$ ist voll und wird geteilt in RS und UV, wobei T zur Wurzel hinzugefügt wird. Q wird daraufhin in Blatt RS hinzugefügt.
- L einfügen
  Die Wurzel ist voll und wird geteilt in GM und TX, wobei P die neue Wurzel wird. L wird daraufhin in Blatt JK eingefügt.
- F einfügen
  Blatt $ABCDE$ ist voll und wird geteilt in AB und DE, wobei C dem Elter hinzugefügt wird. F wird daraufhin in Blatt DE eingefügt.

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Löschen

Algorithmus: B-Tree Delete.

Eingabe: x. Wurzel des Teilbaums, in dem k zu finden ist.
k. Zu löschender Schlüssel.

Ausgabe: Um k reduzierter B-Tree.

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Löschen

Algorithmus: B-Tree Delete.

Eingabe: x. Wurzel des Teilbaums, in dem k zu finden ist.
k. Zu löschender Schlüssel.

Ausgabe: Um k reduzierter B-Tree.

Vorüberlegungen:

- k wird aus dem Knoten gelöscht, in dem er sich befindet.
  Befindet sich k in einem inneren Knoten, muss der Baum zunächst rekonfiguriert werden, damit das Entfernen von k möglich wird.
- Rekonfigurationsoperation: Schlüssel verschieben.
  Ein Schlüssel k kann durch seinen Vorgänger oder Nachfolger ersetzt werden. Dazu wird eine Rotation von Schlüsseln aus Geschwisterknoten durchgeführt.
- Rekonfigurationsoperation: Knoten verschmelzen.
  Wenn Geschwisterknoten die Minimalzahl an Schlüsseln enthalten, erlaubt nur ihre Verschmelzung die für das Löschen notwendigen Verschiebungen.
- Die Mindestzahl an Schlüssel wird auf t festgelegt (nicht $t - 1$).
  Stellt sicher, dass Rekonfigurationen „im Vorbeigehen“ ohne Rückgriff auf Elter möglich sind.

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Löschen

BTreeDelete(x, k)

1. k ist in x und x ist ein Blatt: Lösche k.

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Löschen

BTreeDelete(x, k)

1. k ist in x und x ist ein Blatt: Lösche k.
2. k ist in x und x ist innerer Knoten:
   (a) Kind y, das Schlüssel k vorangeht, hat mindestens t Schlüssel.
   Finde und lösche k's Vorgänger k' und ersetze k durch k'.
   (b) Kind z, das Schlüssel k folgt, hat mindestens t Schlüssel.
   Finde und lösche k's Nachfolger k' und ersetze k durch k'.
   (c) y und z haben je $t - 1$ Schlüssel.
   Verschmelze z mit y mit k als Median; lösche z und fahre rekursiv bei y fort.

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Löschen

BTreeDelete(x, k)

1. k ist in x und x ist ein Blatt: Lösche k.
2. k ist in x und x ist innerer Knoten:
   (a) Kind y, das Schlüssel k vorangeht, hat mindestens t Schlüssel.
   Finde und lösche k's Vorgänger k' und ersetze k durch k'.
   (b) Kind z, das Schlüssel k folgt, hat mindestens t Schlüssel.
   Finde und lösche k's Nachfolger k' und ersetze k durch k'.
   (c) y und z haben je $t - 1$ Schlüssel.
   Verschmelze z mit y mit k als Median; lösche z und fahre rekursiv bei y fort.
3. k ist nicht in x und x ist innerer Knoten:
   (a) Kind y, Wurzel des Teilbaums, der k enthalten müsste, hat $\geq t$ Schlüssel.
   Fahre rekursiv bei y fort.
   (b) y hat einen linken oder rechten Geschwister z mit $\geq t$ Schlüsseln.
   Ersetze k durch Verschieben von Schlüssel k', der x von z trennt aus x nach y und ersetze k' durch seinen Vorgänger/Nachfolger k'' aus z. Fahre rekursiv bei y fort.
   (c) Beide direkten Geschwister von y haben $t - 1$ Schlüssel.
   Verschmelze y mit einem seiner Geschwister. Fahre rekursive bei y fort.

© POTTHAST 2019

Bemerkungen:

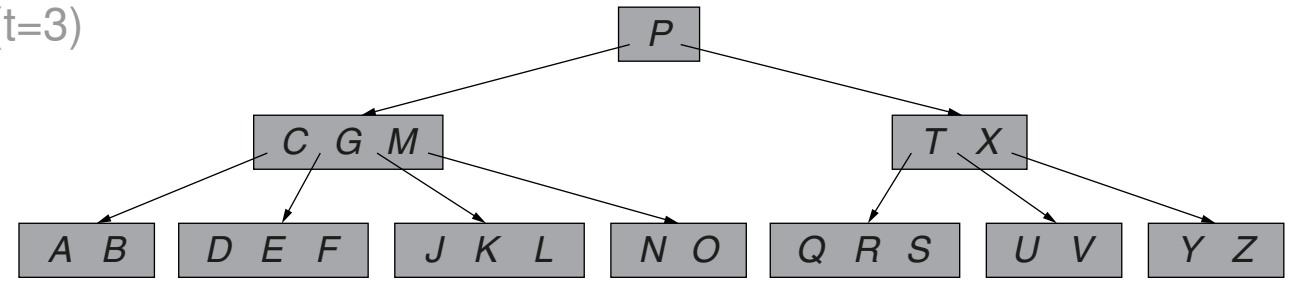
- Laufzeit:
  - Latenzzeit: $O(h) = O(\log_t n)$
  - Rechenzeit: $O(th) = O(t \log_t n)$

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Löschen

Beispiel: (t=3)



Nächste Operation:

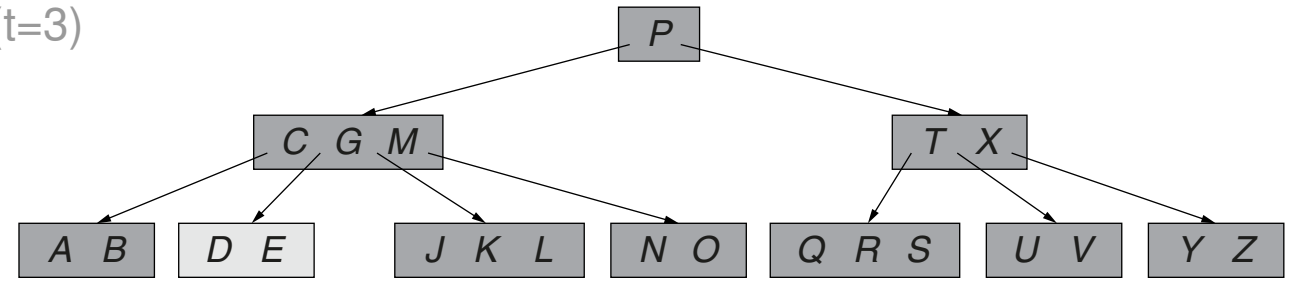
- F löschen

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Löschen

Beispiel: (t=3)



Nächste Operation:

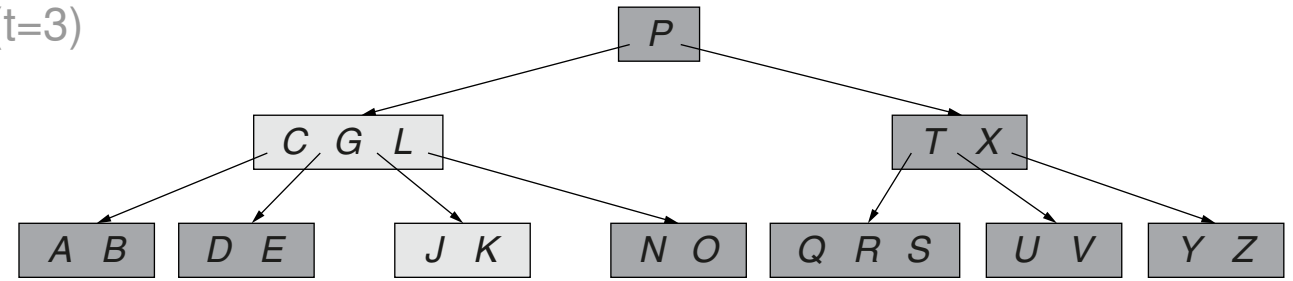
- F löschen
  Fall 1: F wird gelöscht.
- M löschen

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Löschen

Beispiel: (t=3)



Nächste Operation:

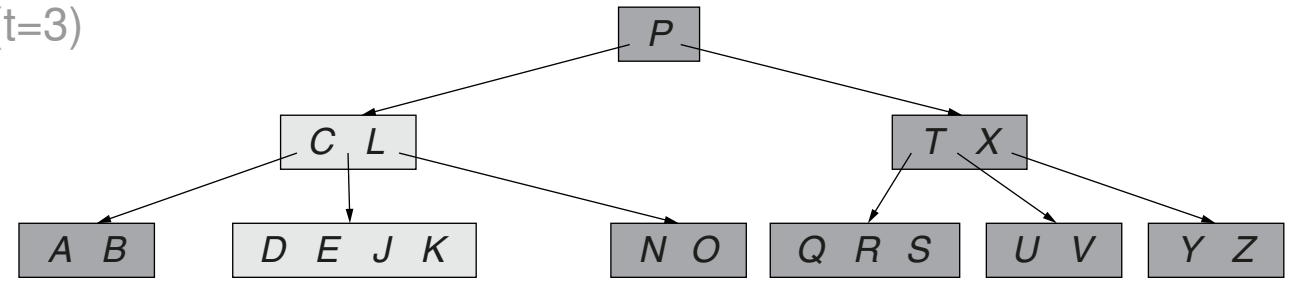
- F löschen
  Fall 1: F wird gelöscht.
- M löschen
  Fall 2a: M wird durch Vorgänger L ersetzt.
- G löschen

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Löschen

Beispiel: (t=3)



Nächste Operation:

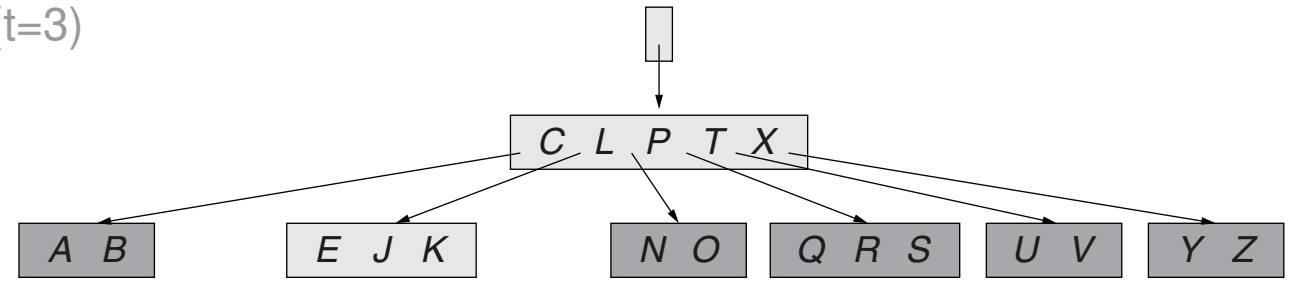
- F löschen
  Fall 1: F wird gelöscht.
- M löschen
  Fall 2a: M wird durch Vorgänger L ersetzt.
- G löschen
  Fall 2c: DE und JK werden vereint; daraufhin G gelöscht.
- D löschen

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Löschen

Beispiel: (t=3)



Nächste Operation:

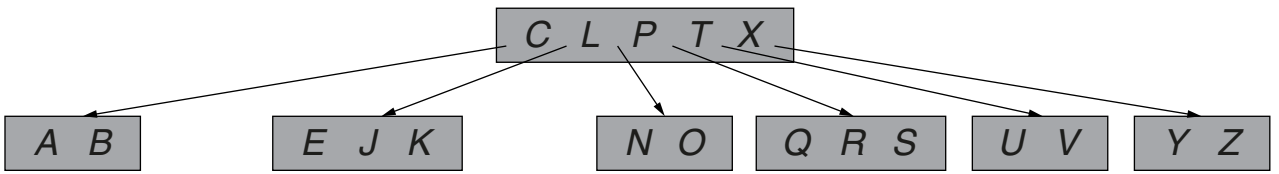
- F löschen
  Fall 1: F wird gelöscht.
- M löschen
  Fall 2a: M wird durch Vorgänger L ersetzt.
- G löschen
  Fall 2c: DE und JK werden vereint; daraufhin G gelöscht.
- D löschen
  Fall 3c: CL, P und TX werden vereint und zur neuen Wurzel; daraufhin D gelöscht.

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Löschen

Beispiel: (t=3)



Nächste Operation:

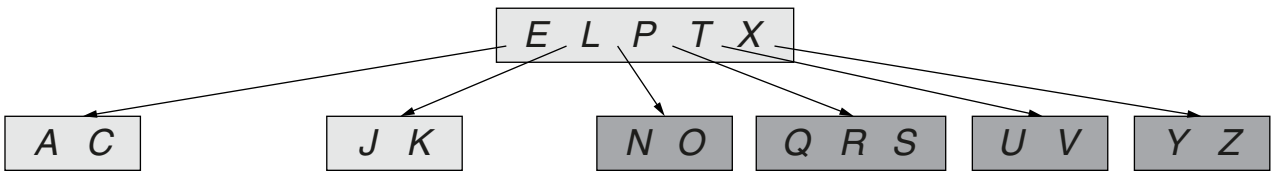
- F löschen
  Fall 1: F wird gelöscht.
- M löschen
  Fall 2a: M wird durch Vorgänger L ersetzt.
- G löschen
  Fall 2c: DE und JK werden vereint; daraufhin G gelöscht.
- D löschen
  Fall 3c: CL, P und TX werden vereint und zur neuen Wurzel; daraufhin D gelöscht.
- B löschen

© POTTHAST 2019

B-Tree

Manipulation: Löschen

Beispiel: (t=3)



Nächste Operation:

- F löschen
  Fall 1: F wird gelöscht.
- M löschen
  Fall 2a: M wird durch Vorgänger L ersetzt.
- G löschen
  Fall 2c: DE und JK werden vereint; daraufhin G gelöscht.
- D löschen
  Fall 3c: CL, P und TX werden vereint und zur neuen Wurzel; daraufhin D gelöscht.
- B löschen
  Fall 3b: B wird durch C und C durch E ersetzt.

© POTTHAST 2019