

# Kapitel L:V

## V. Erweiterungen und Anwendungen zur Logik

- ❑ Produktionsregelsysteme
- ❑ Inferenz für Produktionsregelsysteme
- ❑ Produktionsregelsysteme mit Negation
- ❑ Regeln mit Konfidenzen
  
- ❑ Nicht-monotones Schließen
  
- ❑ Logik und abstrakte Algebren
  
- ❑ Verifikation
- ❑ Verifikation mit dem Hoare-Kalkül
- ❑ Hoare-Regeln und partielle Korrektheit
- ❑ Terminierung

# Nicht-monotones Schließen

## Problemlösen mittels Logik

1. Ausgangspunkt.  
Ein System der realen Welt und eine Frage dazu.
2. Modellbildung.  
Abstraktion des Systems ( $\rightsquigarrow$  Modell) und der Frage.
3. Formalisierung.  
Beschreibung von Modell und Frage als Formel  $\alpha$  bzw.  $\beta$ .
4. Schlussfolgern bzw. Inferenz.
  - (a) Überprüfung ob  $\alpha \models \beta$  gilt.
  - (b) Bestimmung möglicher Folgerungen  $\beta'$  aus  $\alpha$ .

## Bemerkungen:

- ❑ Nach dem Schlussfolgerungsprozess weiß man  $\alpha \wedge \beta$  bzw.  $\alpha \cup \beta$ .
- ❑ Das klassische Schlussfolgern basiert auf unserem Wissen über die Dinge.
- ❑ Beim klassischen Schlussfolgern nimmt unser Wissen immer weiter zu: Je mehr man weiß bzw. je „größer“  $\alpha$  ist, um so mehr kann man folgern. Der Schlussfolgerungsprozess ist monoton.

# Nicht-monotones Schließen

## Schlussfolgern in der klassischen Logik

(a) Gegeben:  $\alpha = \{\gamma, \gamma \rightarrow \beta\}$

Schlussregel: Modus Ponens.

$$\gamma \wedge (\gamma \rightarrow \beta) \vdash \beta$$

# Nicht-monotones Schließen

## Schlussfolgern in der klassischen Logik

(a) Gegeben:  $\alpha = \{\gamma, \gamma \rightarrow \beta\}$

Schlussregel: Modus Ponens.

$$\gamma \wedge (\gamma \rightarrow \beta) \vdash \beta$$

(b) Gegeben:  $\alpha = \{\gamma \wedge \neg\delta, \gamma \wedge \neg\delta \rightarrow \beta\}$

Schlussregel: Modus Ponens.

$$\gamma \wedge \neg\delta \wedge (\gamma \wedge \neg\delta \rightarrow \beta) \vdash \beta$$

# Nicht-monotones Schließen

## Schlussfolgern in der klassischen Logik

(a) Gegeben:  $\alpha = \{\gamma, \gamma \rightarrow \beta\}$

Schlussregel: Modus Ponens.

$$\gamma \wedge (\gamma \rightarrow \beta) \vdash \beta$$

(b) Gegeben:  $\alpha = \{\gamma \wedge \neg\delta, \gamma \wedge \neg\delta \rightarrow \beta\}$

Schlussregel: Modus Ponens.

$$\gamma \wedge \neg\delta \wedge (\gamma \wedge \neg\delta \rightarrow \beta) \vdash \beta$$

(c) Gegeben:  $\alpha = \{\gamma \wedge \delta, \gamma \wedge \delta \rightarrow \beta\}$

Schlussregel: Modus Ponens.

$$\gamma \wedge \delta \wedge (\gamma \wedge \delta \rightarrow \beta) \vdash \beta$$

## Bemerkungen:

- ❑ Die Mengenschreibweise bei den Formeln steht für eine logische UND-Verknüpfung.
- ❑ Schlussfolgern über Nicht-Wissen erfordert besondere Ableitungsprinzipien.
- ❑ Die zwei wichtigsten Ansätze hierzu sind Negation-as-Failure und das logische Schließen mittels Defaults (Default-Logik).

# Nicht-monotones Schließen

## Schlussfolgern über Nicht-Wissen: Negation-as-Failure

Gegeben:  $\alpha = \{\gamma, \gamma \wedge \neg\delta \rightarrow \beta\}$

Ableitungsprinzip:  $\frac{}{\text{naf}}$   $\equiv$  Modus Ponens + Negation-as-Failure.

$$\gamma \wedge (\gamma \wedge \neg\delta \rightarrow \beta) \frac{}{\text{naf}} \beta$$



## Bemerkungen:

- ❑ Lässt sich eine Formel  $\delta$  nicht aus  $\alpha$  ableiten\*, so darf *unter Vorbehalt* ihr Gegenteil,  $\neg\delta$ , konjunktiv zu  $\alpha$  hinzugenommen werden. Aus semantischer Sicht ist dies gleichbedeutend damit, dass  $\neg\delta$  vorläufig als wahr angenommen wird.  
Idee: Closed-World-Assumption. „Alles, was gilt, ist ableitbar.“ bzw. „Was nicht ableitbar ist, das gilt auch nicht.“
  - ❑ Durch Negation-as-Failure wird  $\alpha$  (unter Vorbehalt, auf Basis aktuellen Wissens) so modifiziert, dass der Modus Ponens bzw. Resolution anwendbar wird (vgl. vorherige Folie zur klassischen Logik).
  - ❑ Dieses Ableitungsprinzip findet in der Programmiersprache Prolog Verwendung, wobei statt des Modus Ponens das Resolutionsverfahren eingesetzt wird.
- (\*) Bei Negation-as-Failure in Prolog wird versucht,  $\delta$  mittels Backward-Chaining abzuleiten.

# Nicht-monotones Schließen

Schlussfolgern über Nicht-Wissen: Default-Logik [Doyle/McDermott 1980]

Gegeben:  $\alpha = \{\gamma, \gamma \wedge M\delta \rightarrow \beta\}$

Ableitungsprinzip:  $\frac{}{\text{default}} \equiv \text{Modus Ponens} + \text{Default.}$

$$\gamma \wedge (\gamma \wedge M\delta \rightarrow \beta) \frac{}{\text{default}} \beta$$

Schreibweise: Default-Regel

$$\frac{\gamma \wedge M\delta}{\beta}$$

## Bemerkungen:

- Lässt sich eine Formel  $\neg\delta$  nicht aus  $\alpha$  ableiten\*, so darf *unter Vorbehalt* ihr Gegenteil,  $\delta$ , konjunktiv zu  $\alpha$  hinzugenommen werden. Aus semantischer Sicht ist dies gleichbedeutend damit, dass  $\delta$  als wahr angenommen wird.

Idee: „Solange kein Widerspruch bei der Annahme eines Sachverhalts auftritt, gehe von seiner Gültigkeit aus.“  $M\delta \equiv$  „it is consistent to assume  $\delta$ .“

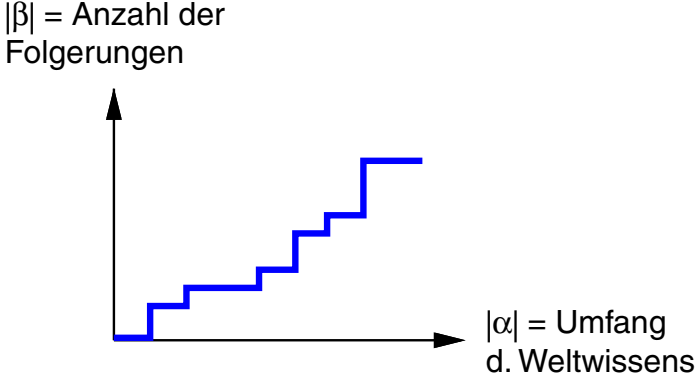
- Das „ $M$ “ (Modality) bei der Default-Logik kennzeichnet einen logischen Fakt, der defaultmäßig als vorhanden angesehen wird bzw. für den der Wert „wahr“ angenommen wird. Dadurch wird  $\alpha$  (unter Vorbehalt, auf Basis aktuellen Wissens) so modifiziert, dass der Modus Ponens anwendbar wird (vgl. vorherige Folie zur klassischen Logik).

(\*) Der Ableitungsprozess in der Default-Logik ist üblicherweise datengetrieben, also Forward-Chaining.

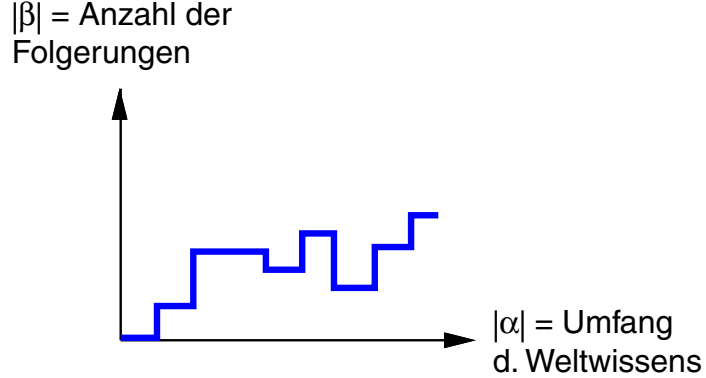
# Nicht-monotones Schließen

## Schlussfolgern über Nicht-Wissen

Eine Besonderheit bei Schlussfolgern über Nicht-Wissen ist, dass bei Zunahme des Wissens über die Welt das folgerbare Wissen abnehmen kann:  $\alpha$  wird größer, die Menge  $\beta$  der Folgerungen aus  $\alpha$  jedoch kleiner.



Klassische, monotone Situation



Nicht-monotone Situation

## Bemerkungen:

- Wenn man über „Nicht-Wissen“ schlussfolgert nimmt die Menge der ableitbaren Fakten (= Wissen) nicht notwendiger Weise zu. Der Schlussfolgerungsprozess ist nicht-monoton. Üblich in diesem Zusammenhang ist deshalb der Begriff des *nicht-monotonen Schließens*.

# Nicht-monotones Schließen

## Schlussfolgern über Nicht-Wissen

Beispiel:  $\alpha = \{C, (C \rightarrow B), ((B \wedge \neg D) \rightarrow E)\}$

Ableitungsprinzip:  $\frac{}{\text{naf}}$   $\equiv$  Modus Ponens + Negation-as-Failure

Frage:  $\beta = \{E\}$ . Gilt  $\alpha \frac{}{\text{naf}} \beta$  ?

# Nicht-monotones Schließen

## Schlussfolgern über Nicht-Wissen

Beispiel:  $\alpha = \{C, (C \rightarrow B), ((B \wedge \neg D) \rightarrow E)\}$

Ableitungsprinzip:  $\frac{}{\text{naf}}$   $\equiv$  Modus Ponens + Negation-as-Failure

Frage:  $\beta = \{E\}$ . Gilt  $\alpha \frac{}{\text{naf}} \beta$  ?

Zeitpunkt	$t_1$	$t_2$	$t'_2$
Weltwissen	$D$ ist unbekannt	$D$ ist wahr	$\neg D$ ist wahr
Folgerungen	$B, E$	$B$	$B, E$

Wie operationalisiert man nicht-monotones Schließen?

## Bemerkungen:

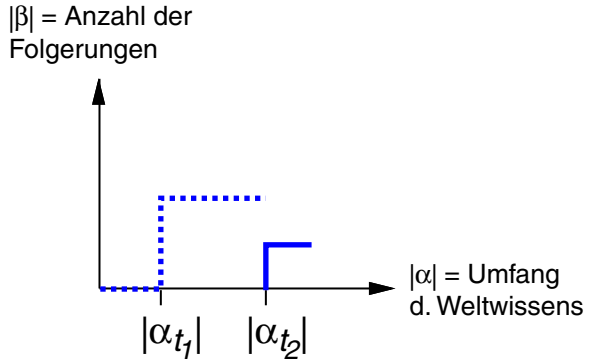
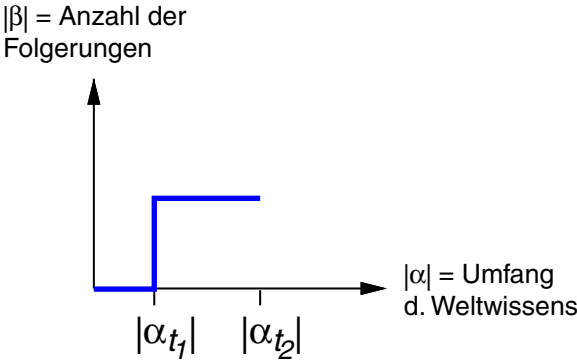
- ❑ Kommt man von der Situation zum Zeitpunkt  $t_1$  in die Situation zum Zeitpunkt  $t_2$ , so darf unter der Annahme der Closed-World-Assumption  $E$  nicht in der Menge der abgeleiteten Fakten sein, denn  $E$  kann in dieser Situation nicht gefolgert werden.
- ❑ Die Mengenschreibweise bei den Formeln steht für eine logische UND-Verknüpfung.



# Nicht-monotones Schließen

## Operationalisierung

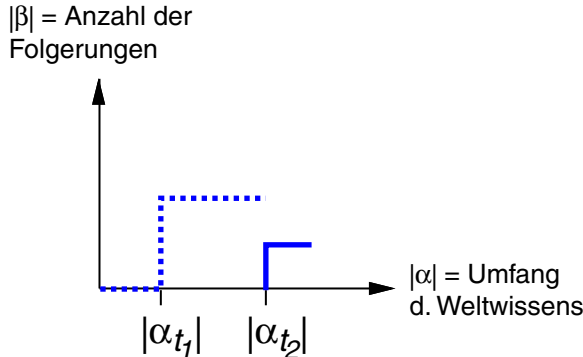
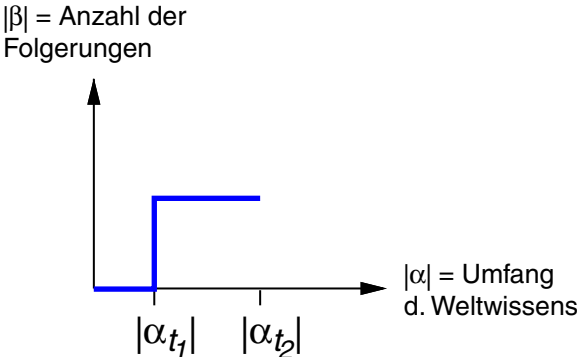
(a) Jedes Mal, wenn sich das Weltwissen ändert, werden alle Folgerungen (abgeleitete Fakten) gelöscht und der Inferenzprozess von vorne gestartet:



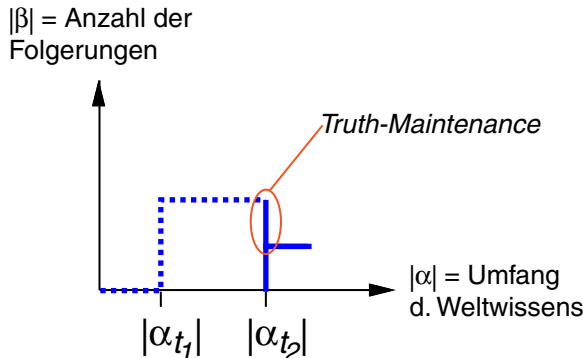
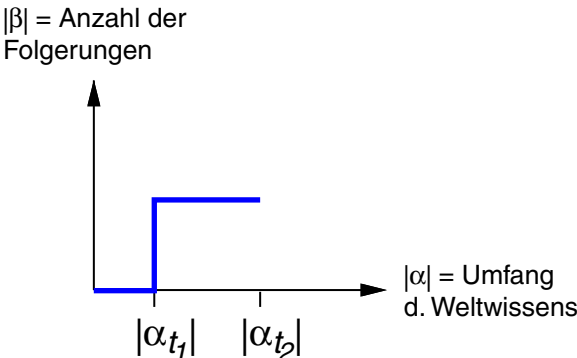
# Nicht-monotones Schließen

## Operationalisierung

(a) Jedes Mal, wenn sich das Weltwissen ändert, werden alle Folgerungen (abgeleitete Fakten) gelöscht und der Inferenzprozess von vorne gestartet:



(b) Die Menge der Folgerungen (ableitbaren Fakten) wird inkrementell konsistent bzgl. der Schlussregel gehalten:



## Bemerkungen:

- Systeme, die dabei helfen, einen nicht-montonen Schlussfolgerungsprozess nachzubilden, heißen *Truth-Maintenance-Systeme* (TMS) oder auch *Reason-Maintenance-Systeme* (RMS). Zwei wichtige Vertreter sind das Justification-based TMS und das Assumption-based TMS.

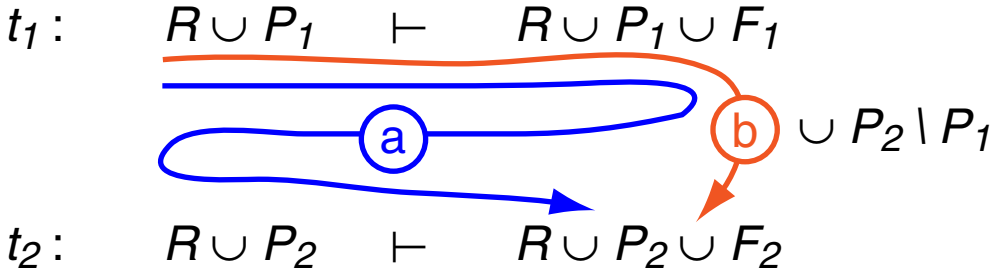
# Nicht-monotones Schließen

## Modellierung

Viele Modelle (z. B. in der Diagnose) lassen eine Aufteilung in folgende Mengen zu:

- $R$ , universelle Formeln über die Welt (Regeln).
- $P_t$ , aktuelles Faktenwissen über die Welt zum Zeitpunkt  $t$  (Prämissen).
- $\underbrace{F_t}_\beta$ , Folgerungen aus  $\underbrace{R \cup P_t}_\alpha$ .

Es gelte  $P_1 \subset P_2$ . Die beiden Konzepte zur Operationalisierung des nicht-monotonen Schließens lassen sich wie folgt illustrieren:



## Bemerkungen:

- Mit  $P_1 \subset P_2$  gilt unmittelbar  $F_1 \subseteq F_2$  für die monotone Situation. Für die nicht-monotone Situation lässt sich keine Aussage über die Relation zwischen  $F_1$  und  $F_2$  machen.