Kapitel L:III

III. Prädikatenlogik

- ❑ Motivation
- ❑ Syntax der Prädikatenlogik
- ❑ Semantik der Prädikatenlogik
- ❑ Wichtige Äquivalenzen

- ❑ Einfache Normalformen
- ❑ Substitution
- ❑ Skolem-Normalformen

- ❑ Standard-Erfüllbarkeit
- ❑ Prädikatenlogische Resolution
- ❑ Grenzen der Prädikatenlogik

Einfache Normalformen

Definition 14 (Negationsnormalform)

Sei α eine prädikatenlogische Formel. α ist in Negationsnormalform (NNF) genau dann, wenn jedes Negationszeichen in α unmittelbar vor einem Prädikat steht und α weder den Junktor $\rightarrow$ noch den Junktor $\leftrightarrow$ enthält.

Lemma 15

Zu jeder prädikatenlogischen Formel α gibt es eine äquivalente Formel in Negationsnormalform (NNF).

Beweis induktiv über Formelaufbau.

Einfache Normalformen

Definition 16 (pränexe Normalform)

Eine Formel ist in pränexer Normalform (PNF) genau dann, wenn sie in KNF ist und alle Quantoren am Anfang stehen:

$$Qx_1Qx_2\ldots Qx_n(\alpha) \text{ mit } Q_i \in \{\forall, \exists\} \text{ und } \alpha \text{ quantorfrei (in KNF)}$$

Problem:
Überschneidung der Bindungsbereiche von Quantoren in pränexer Normalform.

Einfache Normalformen

Erzeugung einer pränexen Normalform.

1. Benenne durch Verwendung von neuen Variablen alle quantifizierten Variablen so um, dass verschiedene Quantoren sich auf verschiedene Variablen beziehen und keine Variable sowohl gebunden als auch frei vorkommt.

2. Wende folgende Ersetzungsregeln (Äquivalenzen) solange wie möglich an:

   a) Ersetze $(\forall x \alpha) \land \beta$ durch $\forall x(\alpha \land \beta)$
   b) Ersetze $(\exists x \alpha) \land \beta$ durch $\exists x(\alpha \land \beta)$
   c) Ersetze $(\forall x \alpha) \lor \beta$ durch $\forall x(\alpha \lor \beta)$
   d) Ersetze $(\exists x \alpha) \lor \beta$ durch $\exists x(\alpha \lor \beta)$
   e) Ersetze $\neg \forall x \alpha$ durch $\exists x \neg \alpha$
   f) Ersetze $\neg \exists x \alpha$ durch $\forall x \neg \alpha$

3. Wende folgende Ersetzungsregeln (Äquivalenzen) solange wie möglich an:

   g) Ersetze $\neg(\alpha \land \beta)$ durch $\neg \alpha \lor \neg \beta$
   h) Ersetze $\neg(\alpha \lor \beta)$ durch $\neg \alpha \land \neg \beta$

4. Wende folgende Ersetzungsregel (Äquivalenz) solange wie möglich an:

   i) Ersetze $(\alpha \land \beta) \lor \gamma$ durch $(\alpha \lor \gamma) \land (\beta \lor \gamma)$

Einfache Normalformen

Lemma 17

Zu jeder prädikatenlogischen Formel α gibt es eine äquivalente Formel in pränexer Normalform (PNF).

Beispiel.

$$\begin{aligned}
\alpha &= \neg\forall x(P(x) \land Q(x)) \;\land\; \forall x(\neg P(x) \to R(x)) \;\land\; \forall x(Q(x) \;\land\; \exists y R(y)) \\
&\approx \neg\forall x_1(P(x_1) \land Q(x_1)) \;\land\; \forall x_2(\neg P(x_2) \to R(x_2)) \;\land\; \forall x_3(Q(x_3) \;\land\; \exists y R(y)) \\
&\approx \exists x_1\neg(P(x_1) \land Q(x_1)) \;\land\; \forall x_2(P(x_2) \lor R(x_2)) \;\land\; \forall x_3\exists y(Q(x_3) \;\land\; R(y)) \\
&\approx \exists x_1\forall x_2\forall x_3\exists y \; \underbrace{\Big((\neg P(x_1) \lor \neg Q(x_1)) \;\land\; (P(x_2) \lor R(x_2)) \;\land\; Q(x_3) \;\land\; R(y)\Big)}_{\text{in KNF}}
\end{aligned}$$

Kapitel L:III

III. Prädikatenlogik

- ❑ Motivation
- ❑ Syntax der Prädikatenlogik
- ❑ Semantik der Prädikatenlogik
- ❑ Wichtige Äquivalenzen

- ❑ Einfache Normalformen
- ❑ Substitution
- ❑ Skolem-Normalformen

- ❑ Standard-Erfüllbarkeit
- ❑ Prädikatenlogische Resolution
- ❑ Grenzen der Prädikatenlogik

Substitution

Beobachtung.

Quantifizierte prädikatenlogische Formeln beschreiben Sachverhalte allgemein:

$$\forall x \exists y\ (P(f(x,y)) \land \forall x Q(x,y))$$

Interpretationen verlagern die Betrachtung von Spezialisierungen in die Domäne.

Wie lassen sich Spezialisierungen bilden?

$$\forall x (P(f(x,g(x))) \land Q(x,g(x)))$$

Wie werden Formeln instantiiert?

$$P(f(a,g((g(a))))) \land Q(g(a),g((g(a))))$$

➜ *Simultane* Ersetzung (Substitution) von Variablen durch Terme.

Substitution

Definition 18 (Substitution)

Unter einer Substitution $[x/t]$ verstehen wir die simultane Ersetzung aller Vorkommen der Variablen x durch einen Term t. Dieser Ersetzungsvorgang wird induktiv für Terme und Formeln definiert durch:

1. $x[x/t] = t$ und für eine Individuenvariable $y \neq x$ ist $y[x/t] = y$.
2. Für eine Individuenkonstante a ist $a[x/t] = a$.
3. Für eine n-stellige Funktion f und Terme $t_1, \ldots, t_n$ ist
$f(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = f(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$.

Substitution

Definition 18 (Substitution)

Unter einer Substitution $[x/t]$ verstehen wir die simultane Ersetzung aller Vorkommen der Variablen x durch einen Term t. Dieser Ersetzungsvorgang wird induktiv für Terme und Formeln definiert durch:

1. $x[x/t] = t$ und für eine Individuenvariable $y \neq x$ ist $y[x/t] = y$.
2. Für eine Individuenkonstante a ist $a[x/t] = a$.
3. Für eine n-stellige Funktion f und Terme $t_1, \ldots, t_n$ ist $f(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = f(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$.

---

4. Für ein n-stelliges Prädikat P und Terme $t_1, \ldots, t_n$ ist $P(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = P(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$.
5. Ist α eine Formel und ist $\alpha[x/t]$ definiert, so ist $(\neg\alpha)[x/t] = \neg\alpha[x/t]$.
6. Sind α und β Formeln und sind $\alpha[x/t]$ und $\beta[x/t]$ definiert, so ist $(\alpha \vee \beta)[x/t] = \alpha[x/t] \vee \beta[x/t]$, $(\alpha \wedge \beta)[x/t] = \alpha[x/t] \wedge \beta[x/t]$, $(\alpha \rightarrow \beta)[x/t] = \alpha[x/t] \rightarrow \beta[x/t]$ und $(\alpha \leftrightarrow \beta)[x/t] = \alpha[x/t] \leftrightarrow \beta[x/t]$.
7. Für eine Formel α und eine Variable y gilt:
   (a) Gilt $x \notin$ *freevars*(α) oder $y = x$, so ist $(\exists y\alpha)[x/t] = \exists y\alpha$ und $(\forall y\alpha)[x/t] = \forall y\alpha$.
   (b) Gilt $x \in$ *freevars*(α), $y \neq x$, $y \notin$ *vars*(t) und ist $\alpha[x/t]$ definiert, so ist $(\exists y\alpha)[x/t] = \exists y\alpha[x/t]$ und $(\forall y\alpha)[x/t] = \forall y\alpha[x/t]$.

Bemerkungen:

- Formelmanipulation war bisher die Anwendung von Äquivalenzregeln wie $\neg\neg\alpha \approx \alpha$. Das entspricht der Ersetzung von Teilformeln durch logisch äquivalente Teilformeln, jetzt werden Variablen durch Terme ersetzt.
- Im allgemeinen Fall muss das Resultat einer Substitution keine Spezialisierung bzw. semantische Folgerung der Ausgangsformel sein.
- Die Substitution ist eine Präzisierung der Ersetzung, die schon in der „gebundenen Umbenennung“, d.h. der Ersetzung von quantifizierten Variablen durch neue Variablen verwendet wurde.

Substitution

Definition 19 (Substitution mit Ersetzungsliste)

Sei der Ausdruck $[x_1/t_1][x_2/t_2]\dots[x_n/t_n]$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ als Ersetzungsliste bezeichnet.

Unter einer Substitution mit Ersetzungsliste verstehen wir die Hintereinanderausführung der in der Ersetzungsliste festgelegten Substitutionen genau in der dort definierten Reihenfolge.

Sprechweise:

Wir bezeichnen eine Substitution mit Ersetzungsliste $[x_1/t_1][x_2/t_2]\dots[x_n/t_n]$ kurz als die Substitution $[x_1/t_1][x_2/t_2]\dots[x_n/t_n]$.

Bemerkungen:

- In der Literatur findet man auch Ersetzungslisten der Form $[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$, welche die *gleichzeitige* Durchführung der aufgeführten Substitutionen definiert.

- Eine solche Ersetzungsliste lässt sich ohne weiteres in eine Form bringen, so dass die modifizierten Einzelersetzungen unabhängig voneinander sind und damit in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden können. Insgesamt erhält man eine meist längere Ersetzungsliste aus Einzelersetzungen, die in einer Reihen folge genau das Ergebnis der Ersetzungsliste $[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$ ergibt.

Substitution

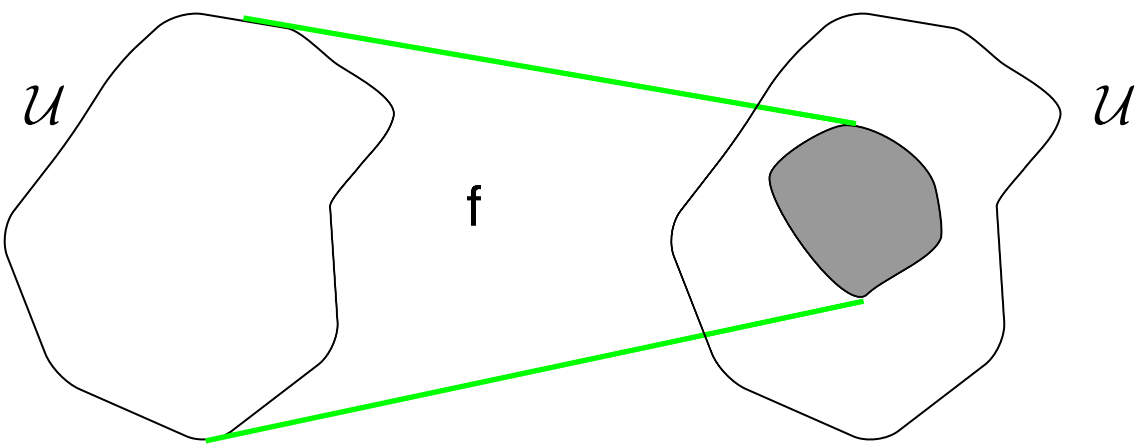
Lemma 20

Sei x eine freie Variable, t ein Term und $\forall x\ \alpha$ eine prädikatenlogische Formel ohne Existenzquantoren. Seien weiter $x_1, \ldots, x_n \notin$ *vars*(α) die Variablen des Terms t. Dann gilt für die Substitution $[x/t]$:

$$\forall x \alpha \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \alpha[x/t]$$

Beispiel.

$\alpha = \forall x\ P(x)$, $t = f(y, z)$, $\alpha[x/t] = P(f(y, z))$, $\alpha \models \forall y \forall z\ P(f(y, z))$



Bemerkungen:

- Um α zu erfüllen, muss $P(x)$ für alle $x \in \mathcal{U}$ erfüllt sein.
- Von f, $f : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, wird keine Surjektivität gefordert.
- Das Bild von f ist eine Teilmenge von $\mathcal{U}$.
- Ist also $\forall x\ P(x)$ erfüllt, so ist auch $\forall y \forall z\ P(f(y,z))$ erfüllt.
  In Zeichen: $\forall x\ P(x) \models \forall y \forall z\ P(f(y,z))$

Kapitel L:III

III. Prädikatenlogik

- Motivation
- Syntax der Prädikatenlogik
- Semantik der Prädikatenlogik
- Wichtige Äquivalenzen

- Einfache Normalformen
- Substitution
- Skolem-Normalformen

- Standard-Erfüllbarkeit
- Prädikatenlogische Resolution
- Grenzen der Prädikatenlogik

Skolem-Normalformen

Eigenschaften freier Variablen:

- liegen im Bindungsbereich keines Quantors,
- Bedeutungszuordnung unmittelbar durch Interpretation,
- notwendig zur korrekten Berechnung von Wahrheitswerten für Teilformeln,
- bei Fragen der Erfüllbarkeit gleichbedeutend mit existenzquantifizierten Variablen, bei Fragen nach Tautologie-Eigenschaft gleichbedeutend mit allquantifizierten Variablen.

Skolem-Normalformen

Modellierung basiert auf:

- Fakten (geltende Aussagen) und
- Regeln (geltende Beziehungen zwischen Fakten)
- Keine Notwendigkeit zur Verwendung von freien Variablen.

Beispiel.

Beim Autofahren: Bremsweg ergibt sich aus Geschwindigkeit zum Quadrat.

- $\alpha = A(x) \land V(x, y) \to SB(x, y^2)$
- $\beta = A(x) \land V(x, y) \to SB(x, y^3)$
- Für die spezielle Geschwindigkeit $1 km/h$ machen beide Modelle vernünftige Vorhersagen für die Wirklichkeit.
- Unser Ziel ist jedoch ein möglichst allgemeines Modell zu bilden: α gilt für alle Autos und Geschwindigkeiten:

$$\forall x \forall y \; (\; A(x) \land V(x, y) \to SB(x, y^2) \;)$$

Im folgenden werden nur noch geschlossene Formeln betrachtet.

Skolem-Normalformen

Existenzquantoren werden in jeder Interpretation so gedeutet, dass in Abhängigkeit von den Werten der im Präfix vorstehenden allquantifizierten Variablen ein Wert für die existenzquantifizierte Variable bestimmt werden muss, der die Formel erfüllt.

Idee der Skolem-Normalform:

Einführung einer Abbildung, die den Werten der $\forall$-Variablen einen Wert der $\exists$-Variablen zuordnet.

Skolem-Normalformen

Definition 21 (Skolemisierung)

Sei α eine geschlossene prädikatenlogische Formel. Die Ersetzung der $\exists$-Variablen in α durch eine neue Funktion mit den $\forall$-Variablen, in deren Bindungsbereich sie liegt, als Argumenten heißt Skolemisierung.

Lemma 22

In einer geschlossenen prädikatenlogischen Formel α mit paarweise verschiedenen quantifizierten Variablen sei y eine existenzquantifizierte Variable, die NUR im Bindungsbereich der allquantifizierten Variablen $x_1, \ldots, x_n$ liegt. Sei β die Formel, die sich durch Elimination des Quantors $\exists y$ und Ersetzung aller weiteren Vorkommen von y durch $f(x_1, \ldots, x_n)$ mit einer für α neuen Funktion f ergibt. Dann sind α und β erfüllbarkeitsäquivalent.

Skolem-Normalformen

Definition 23 (Skolem-Normalform)

Sei α eine prädikatenlogische Formel in pränexer Normalform (PNF). α ist in Skolem-Normalform (SKNF) genau dann, wenn α keine Existenzquantoren enthält.

Lemma 24

Zu jeder prädikatenlogischen Formel α gibt es eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolem-Normalform (SKNF).

Beispiel:

$$\exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists y \ ((\neg P(x_1) \vee \neg Q(x_1)) \wedge (P(x_2) \vee R(x_2)) \wedge Q(x_3) \wedge R(y))$$

$$\approx_{\text{sat}}$$

$$\forall x_2 \forall x_3 \ ((\neg P(a_{x_1}) \vee \neg Q(a_{x_1})) \wedge (P(x_2) \vee R(x_2)) \wedge Q(x_3) \wedge R(f_y(x_2, x_3)))$$

Bemerkungen:

- Existenzquantifizierte Variable, die im Bindungsbereich keiner allquantifizierten Variablen liegen, werden durch neue Konstanten ($=$ nullstellige Funktionen) ersetzt.

Skolem-Normalformen

Zusammenfassung: Vorgehensweise zur Umwandlung nach SKNF.

1. Benenne durch Verwendung von neuen Variablen alle quantifizierten Variablen so um, dass verschiedene Quantoren sich auf verschiedene Variablen beziehen und keine Variable sowohl gebunden als auch frei vorkommt.
2. Erstelle eine Negationsnormalform
3. Jede existenzquantifizierte Variable y im Bindungsbereich der allquantifizierten Variablen $x_1, \ldots, x_n$ wird durch einen Term $f_y(x_1, \ldots, x_n)$ ersetzt, wobei f_y jeweils neu für die Formel ist. Für verschiedene Variablen y sind auch die f_y verschieden. Die Existenzquantoren werden eliminiert.
4. Forme die Formel weiter in eine pränexe Normalform um.

Bemerkungen:

- Die Skolemisierung kann prinzipiell zur Ersetzung einer existenzquantifizierten Variablen in einer beliebigen Formel angewendet werden. Für Formeln in Negationsnormalform sind die existenz- und allquantifizierten Variablen aber leichter identifizierbar.

- Für manche Formeln lohnt es sich, zunächst die Quantoren so weit wie möglich nach innen zu ziehen, bevor quantifiziert wird, bei anderen ist es genau umgekehrt. Es gibt kein optimales Verfahren, dass zu jeder prädikatenlogischen Formel eine kürzeste Formel in Skolem-Normalform liefert.

  a) Ausgangspunkt: $\forall x \exists y\ (P(x) \lor Q(y)) \quad \approx \quad \forall x\ P(x) \lor \exists y\ Q(y)$

  b) Ausgangspunkt: $\exists y_1\ P_1(y_1) \lor \ldots \lor \exists y_n\ P_n(y_n)$
  $\approx \quad \exists y\ P_1(y) \lor \ldots \lor \exists y\ P_n(y) \quad \approx \quad \exists y\ (P_1(y) \lor \ldots \lor P_n(y))$

Skolem-Normalformen

Wiederholung: $\forall x\ (\alpha \wedge \beta) \approx \forall x\ \alpha \wedge \forall x \beta$

Definition 25 (Klauselnormalform)

Sei α eine prädikatenlogische Formel. α ist in Klauselnormalform genau dann, wenn α eine Konjunktion von allquantifizierten Klauseln ohne freie Variablen darstellt.

Lemma 26

Zu jeder prädikatenlogischen Formel α in Skolem-Normalform gibt es eine äquivalente Formel in Klauselnormalform.

Eigenschaften der Klauselnormalform:

- Klauseln, d. h. die allquantifizierten geschlossenen Disjunktionen können beliebig verdoppelt werden.
- Die quantifizierten Variablen können beliebig umbenannt werden.

Beide Transformationen führen zu logisch äquivalenten Formeln.

Skolem-Normalformen

Analog zur Aussagenlogik können lassen sich weitere Einschränkungen an die Klauseln einer Formel α in Klauselnormalform angeben:

- Unit-Klauseln
- Horn-Klauseln
- positive Klauseln
- negative Klauseln

Wir können für Formeln in Klauselnormalform die Mengenschreibweise verwenden.

Beispiel:

$$\forall x \forall z(\neg P(a, f(x)) \vee \neg P(x, z)) \wedge \forall x \forall y(P(a, f(b)) \vee P(x, y) \vee P(g(y), x))$$

$$\rightsquigarrow \quad \{\{\neg P(a, f(x)), \neg P(x, z)\}, \{P(a, f(b)), P(x, y), P(g(y), x)\}\}$$