Kapitel S:VI

VI. Relaxed Models

- Motivation
- ε-Admissible Speedup Versions of A*
- Using Information about Uncertainty of h
- Risk Measures
- Nonadditive Evaluation Functions
- Heuristics Provided by Simplified Models
- Mechanical Generation of Admissible Heuristics
- Probability-Based Heuristics

©STEIN/LETTMANN 2023

Heuristiken aus Modellvereinfachungen

Beispiel: Modellvereinfachung für das 8-Puzzle

5	2	3
8		4
7	1	6

Zulässige Schätzfunktionen:

h_1 Anzahl von fehlplazierten Puzzleteilen

h_2 Summe der Manhattan Distanzen

Warum ist die Zulässigkeit von h_1 und h_2 so einfach zu sehen?

- Die Aussage $h(n) \leq h^*(n)$ muss für alle Konfigurationen n des Puzzles, d.h. für alle möglichen Positionen der Puzzleteile auf dem Brett überprüft werden.
- $h^*(n)$ ist unbekannt.

©STEIN/LETTMANN 2023

Heuristiken aus Modellvereinfachungen

Beispiel: Modellvereinfachung für das 8-Puzzle (Fortsetzung)

5	2	3
8		4
7	1	6

Ursprüngliches Modell:

- Bewege Puzzleteile nur auf Nachbarplätze.
- Der Zielplatz für das bewegte Puzzleteil muss frei sein

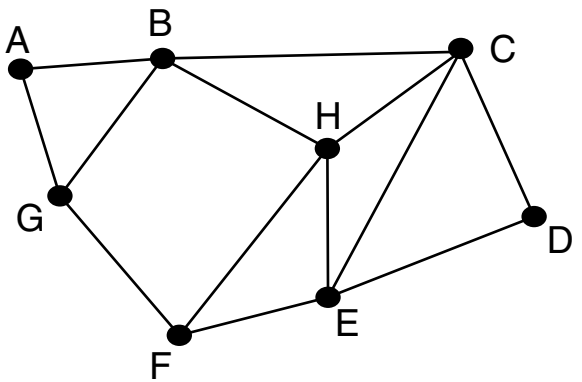
Vereinfachung 1: Ignoriere besetzte Plätze. ➜ h_2

Vereinfachung 2: Ignoriere besetzte Plätze und erlaube beliebige Sprünge. ➜ h_1

©STEIN/LETTMANN 2023

Heuristiken aus Modellvereinfachungen

Beispiel: Modellvereinfachung für TSP



Zulässige Schätzfunktionen für den verbleibenden Weg:

h_1 Summe der Kantengewichte des billigsten Untergraphen mit Grad 2

h_2 Summe der Kantengewichte des minimalen Spannbaums

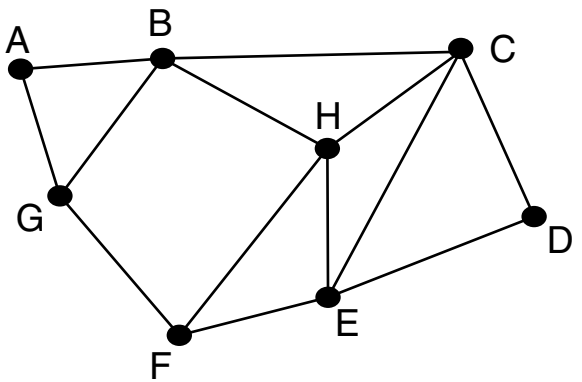
Ursprüngliches Modell:

- Die Lösung muss ein zusammenhängender Teilgraph des Problemgraphen sein.
- In dem durch die Lösung induzierten Teilgraphen muss jeder Knoten den Grad 2 haben.

©STEIN/LETTMANN 2023

Heuristiken aus Modellvereinfachungen

Beispiel: Modellvereinfachung für TSP (Fortsetzung))



Vereinfachung 1: Ignoriere Zusammenhang des Lösungsgraphen. ➜ h_1

Dieses „Optimal Assignment Problem“ kann in $O(k^3)$ Schritten gelöst werden (k Anzahl restlicher Knoten). Das Ergebnis ist immer eine Menge von Zyklen.

Vereinfachung 2: Ignoriere Knotengrade im Lösungsgraphen. ➜ h_2

Dieses „Minimum Spanning Tree Problem“ kann in $O(k^2)$ Schritten gelöst werden, mit k als Anzahl restlicher Knoten.

©STEIN/LETTMANN 2023

Heuristiken aus Modellvereinfachungen

Relaxation

Als Relaxierung eines Suchproblems bezeichnet man das Entfernen von Constraints, die die Anwendung von Operatoren verbieten.

Q. Wo liegen die Vorteile der Verwendung relaxierter Modelle?

A. Relaxierte Modelle sind meist einfacher zu handhaben und zu lösen.

➜ Verwendung von Heuristiken, die optimale Kosten im relaxierten Modell beschreiben.

©STEIN/LETTMANN 2023

Heuristiken aus Modellvereinfachungen

Relaxation

Als Relaxierung eines Suchproblems bezeichnet man das Entfernen von Constraints, die die Anwendung von Operatoren verbieten.

Q. Wo liegen die Vorteile der Verwendung relaxierter Modelle?

A. Relaxierte Modelle sind meist einfacher zu handhaben und zu lösen.

➜ Verwendung von Heuristiken, die optimale Kosten im relaxierten Modell beschreiben.

Problem:

Durch Relaxierung entstehende Probleme können auch komplexer (bzgl. der Laufzeit) sein.

Beispiel:

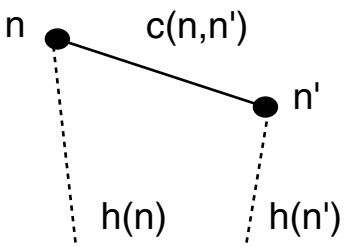
zusätzliche Operatoren (z.B. diagonales Ziehen im 8er-Puzzle) vereinfachen das Problem nicht zwangsläufig.

©STEIN/LETTMANN 2023

Heuristiken aus Modellvereinfachungen

Zulässigkeit, Konsistenz und Monotonie

Heuristiken, die die Kosten einer optimalen Lösung in einem vereinfachten Modell beschreiben, sind zulässig und monoton / konsistent.



Die Heuristik h beschreibe die billigsten Kosten im relaxierten Modell, $c'(n, n')$ die Kantenkosten im relaxierten Modell. Also gilt wegen der Optimalität von h:

$$h(n) \leq c'(n, n') + h(n')$$

Für die Kosten $c'(n, n')$ im relaxierten Modell gilt

$$c'(n, n') \leq c(n, n')$$

Also folgt die Monotonie und damit die Konsistenz von h. Wegen $h(\gamma) = 0$ für $\gamma \in \Gamma$ folgt auch die Zulässigkeit von h.

©STEIN/LETTMANN 2023

Heuristiken aus Modellvereinfachungen

Over-Constraining

Als Überspezifizierung eines Suchproblems bezeichnet man das Hinzufügen weiterer Constraints, z.B. durch Vorgeben einer Teillösung.

Problem:

Die durch das Lösen von überspezifizierten Problemen gewonnenen Heuristiken sind meist nicht zulässig.

Beispiel:

Das Problem TSP kann durch die Festlegung einer Anfangstour durch einen Teil der Städte vereinfacht werden. Die durch Lösen des überspezifizierten Problems abgeschätzten Kosten können aber benutzt werden, um Suchpfade abzuschneiden. Warum?

©STEIN/LETTMANN 2023

Kapitel S:VI

VI. Relaxed Models

- Motivation
- ε-Admissible Speedup Versions of A*
- Using Information about Uncertainty of h
- Risk Measures
- Nonadditive Evaluation Functions
- Heuristics Provided by Simplified Models
- Mechanical Generation of Admissible Heuristics
- Probability-Based Heuristics

©STEIN/LETTMANN 2023

Automatische Generierung von Heuristiken

Systematisches Relaxieren von Suchproblemen

Idee:

Zustände werden werden durch Prädikatenmengen und Operatoren durch Änderung der aktuellen Prädikatenmenge bschrieben.

Operatorbescheibung:

- Vorbedingungsliste.
  Eine Menge von Prädikaten, die vor der Operation erfüllt sein müssen.
- Additionsliste.
  Eine Menge von Prädikaten, die durch die Operation zu der Zustandsbeschreibung hinzugefügt werden.
- Subtraktionsliste.
  Eine Menge von Prädikaten, die durch die Operation aus der Zustandsbeschreibung gelöscht werden.

➜ jetzt: Relaxation = Entfernen von Prädikaten aus Vorbedingungslisten

©STEIN/LETTMANN 2023

Automatische Generierung von Heuristiken

Beispiel: 8er-Puzzle

Formale Beschreibung (ähnlich STRIPS):

Prädikat	**Bedeutung**
$ON(x, y)$	Puzzlestein x liegt auf Position y
$CLEAR(y)$	Position y ist leer
$ADJ(y, z)$	Position z ist adjazenz zu Position y

mit $x \in \{X_1, \ldots, X_8\}$ und $y, z \in \{C_1, \ldots, C_9\}$.

Spielfeldbeschreibung: $ADJ(C_1, C_2); ADJ(C_1, C_4); \ldots$

Zustandsbeschreibung z.B.: $ON(X_1, C_1); \ldots; ON(X_8, C_8); CLEAR(C_9)$

Spielzug $MOVE(x, y, z)$: Puzzlestein x von Position y nach Position z:

- Vorbedingungsliste: $ON(x, y), CLEAR(z), ADJ(y, z)$
- Additionsliste: $ON(x, z), CLEAR(y)$
- Subtraktionsliste: $ON(x, y), CLEAR(z)$

©STEIN/LETTMANN 2023

Automatische Generierung von Heuristiken

Beispiel: 8er-Puzzle (Fortsetzung)

Relaxierung entspricht dem Entfernen von Prädikaten aus der Vorbedingungsliste:

1. Entfernen von $CLEAR(z), ADJ(y, z)$.
   Ein Puzzlestein kann direkt auf auf seine Zielposition gelegt werden, egal, ob frei oder nicht.
   ➜ Heuristik h_1 (Anzahl falschplazierter Puzzlesteine)

2. Entfernen von $CLEAR(z)$.
   Ein Puzzlestein kann zu seiner Zielposition wandern, ohne dass Zwischenpositionen frei sein müssen.
   ➜ Heuristik h_2 (Manhattan-Distanz)

3. Entfernen von $ADJ(y, z)$.
   Ein Puzzlestein kann direkt auf das freie Feld gelegt werden (Swap-Sort).
   ➜ neue Heuristik h_3 ($\leq 1.5\times$Anzahl falschplazierter Puzzlesteine)

©STEIN/LETTMANN 2023

Automatische Generierung von Heuristiken

Systematisches Relaxieren von Suchproblemen (Fortsetzung)

Problem:

Relaxierung soll eine vereinfachtes Modell des ursprünglichen Suchproblems liefern. Wann ist ein Problem wirklich einfacher?

Frage:

Kann für ein Suchproblem automatisch ein vereinfachtes Modell erzeugt werden ohne die Vereinfachung zu lösen? – genauer:

Kann für ein Suchproblem der Grad der Vereinfachung für die relaxierten Kandidaten bestimmt werden? – einfacher:

Kann für ein Suchproblem zumindest ein einfaches Modell erkannt werden, wenn es durch Relaxierung erzeugt wird?

Idee:

Wahl von Klassen einfacher Probleme, für die automatisch die Zugehörigkeit überprüft werden kann.

©STEIN/LETTMANN 2023

Automatische Generierung von Heuristiken

Einfache Probleme: kompositionale Probleme

In kompositionalen Problemen werden die Zielzustände durch Bedingungen beschrieben, die aus getrennten, unabhängig voneinander lösbaren Teilproblemen bestehen.

Beispiel 1:

Für das 8er-Puzzle definiert eine Konjunktion von Prädikaten $ON(X_i, C_j)$ den Zielzustand. Bei Benutzung der Heuristik h_1 (Relaxierung: Entfernen von $CLEAR(z), ADJ(y, z)$) stellt jede Zielbedingung $ON(X_i, C_j)$ ein unabhängig lösbares Teilproblem – dem unmittelbaren Plazieren des Puzzleteils – dar.

Beispiel 2:

Für das 8er-Puzzle bilden die einzelnen Zielbedingungen auch bei Benutzung der Heuristik h_2 (Relaxierung: Entfernen von $CLEAR(z)$) unabhängig lösbare Teilprobleme. Hier besteht das Teilproblem aus der Festlegung einer Zugfolge von der aktuellen Position eines Puzzlesteines zu seiner Zielposition.

©STEIN/LETTMANN 2023

Automatische Generierung von Heuristiken

Einfache Probleme: semikompositionale Probleme

Semikompositionale Probleme zeichnen sich dadurch aus, dass entstehende Teilprobleme nicht völlig unabhängig sind.

- Kommutative Probleme:
  Die Reihenfolge der Anwendung einer Menge von Operatoren verändert nicht die Menge der in der Zukunft ausführbaren Operatoren (Greedy-Algorithmen / Hill-Climbing sind anwendbar)
  Beispiel: Minimum-Spanning-Tree Heuristik für das TSP

- Partiell geordnete Probleme:
  Teilprobleme können so geordnet werden, dass die Lösung eines Teilproblems kein schon gelöstes Teilproblem mehr beeinflusst.
  Beispiel: Heuristik h_3 (Swap-Sort) beim 8er-Puzzle

Aufgabe:

Automatische Erkennung solcher Probleme anhand der formalen Beschreibung.

©STEIN/LETTMANN 2023

Kapitel S:VI

VI. Relaxed Models

- Motivation
- ε-Admissible Speedup Versions of A*
- Using Information about Uncertainty of h
- Risk Measures
- Nonadditive Evaluation Functions
- Heuristics Provided by Simplified Models
- Mechanical Generation of Admissible Heuristics
- Probability-Based Heuristics

©STEIN/LETTMANN 2023

Probabilistische Heuristiken

Probabilistisch definierte Probleme

Idee:

Verfolge die wahrscheinlich aussichtsreichste Teillösung zuerst.

Problem:

Es kann nicht garantiert werden, dass die Heuristik zulässig (admissible) ist.

Manche Probleme sind von Natur aus probabilistisch. Für solche Probleme können oft Heuristiken durch statistische Betrachtungen ermittelt werden.

©STEIN/LETTMANN 2023

Probabilistische Heuristiken

Probabilistisch definierte Probleme (Fortsetzung)

Beispiel 1: billigste Pfade in Graphen.

Die Kantenkosten seien eine Zufallsgröße mit Mittelwert μ. Dann liefert $f(n) = g(n) + \mu N$, wobei N die Anzahl der Kanten von n zu einer Lösung bezeichnet, eine Kostenschätzung.

©STEIN/LETTMANN 2023

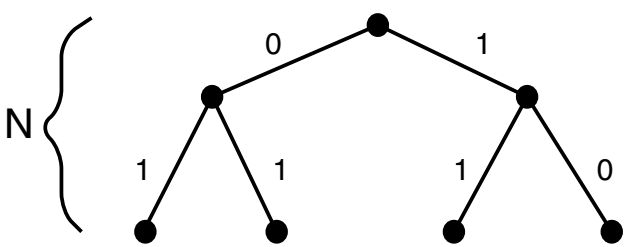
Probabilistische Heuristiken

Probabilistisch definierte Probleme (Fortsetzung)

Beispiel 1: billigste Pfade in Graphen.

Die Kantenkosten seien eine Zufallsgröße mit Mittelwert μ. Dann liefert $f(n) = g(n) + \mu N$, wobei N die Anzahl der Kanten von n zu einer Lösung bezeichnet, eine Kostenschätzung.

Beispiel 2: billigste Pfade in probabilistischen Bäumen.



©STEIN/LETTMANN 2023

Bemerkungen:

- Ein probabilistischer Baum T wird aus dem Wahrscheinlichkeitsraum $T(N,p)$ gezogen, wobei N die Baumhöhe bezeichnet. T ist immer binär und vollständig. Die Wahrscheinlichkeit, dass T N_0 Kanten mit Gewicht 0 und N_1 Kanten mit Gewicht 1 hat, beträgt $p^{N_1}(1-p)^{N_0}$.
- Ein Knoten n hat Kosten c, gdw. c die Summe der Pfadkosten von der Wurzel s nach n ist. Die Zufallsvariable $C(N,p)$ bezeichnet die minimale Anzahl von Kanten mit Gewicht 1 auf einem Pfad von s zu einer Wurzel in einem Baum aus $T(N,p)$. Es gilt: $p < \frac{1}{2}$.
- Such-Algorithmus: In jedem Schritt wird der Knoten mit den billigsten Kosten expandiert. Existieren mehrere solcher Knoten, wird der linkeste gewählt. Das erste Blatt, das expandiert werden soll, wird als Lösung genommen.
- $t(N,p)$ bezeichnet die Anzahl der während einer Ausführung des Algorithmus expandierten Knoten.

©STEIN/LETTMANN 2023

Probabilistische Heuristiken

Asymptotische Verteilung von $C(N,p)$

Satz 101

Die optimalen Kosten bleiben mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit beschränkt:

$$P(C(N,p) > k) \leq (2p)^{2^{k+1}-2} \; k = -1, 0, 1, \ldots, N-1 \; N \to \infty$$

Beweis (Skizze)

$F_k^N = P(C(N,p) > k), k = -1, 0, 1, \ldots, N-1$

Um eine Rekurrenzgleichung für F_k^N aufzustellen, müssen 4 Ausgänge für das Ereignis $C(N,p) > k$ untersucht werden:

Kosten links	0	1	0	1
Kosten rechts	0	0	1	1
Wahrscheinlichkeit	$(1-p)^2$	$p(1-p)$	$(1-p)p$	p^2
$P(C(N,p) > k)$	$(F_k^{N-1})^2$	$F_{k-1}^{N-1} F_k^{N-1}$	$F_k^{N-1} F_{k-1}^{N-1}$	$(F_{k-1}^{N-1})^2$

©STEIN/LETTMANN 2023

Probabilistische Heuristiken

Asymptotische Verteilung von $C(N,p)$

Beweis (Skizze (Fortsetzung)**)**

$$F_k^N = (\,(1-p)F_k^{N-1} + pF_{k-1}^{N-1})^2, \quad F_{-1}^N = 1$$

$N \to \infty$:

$$F_k = lim_{N\to\infty} F_k^N = ((1-P)F_k + pF_{k-1})^2$$

Diese Gleichung hat die nicht-triviale Lösung ($p < \frac{1}{2}$):

$$F_k = \frac{1}{2(1-p)^2}(1 - 2F_{k-1}p(1-p) - \sqrt{1 - 4F_{k-1}p(1-p)})$$

Unter Benutzung der Ungleichung $\sqrt{1-x} \geq (1-x)(1+\frac{x}{2}), 0 \leq x \leq 1$ ergibt sich:

$$F_k \leq 4p^2(F_{k-1})^2$$

Da $F_{-1} = 1$ ist, kann obiger Term wie folgt vereinfacht werden:

$$F_k \leq (4p^2)^{2^k-1} = (2p)^{2^{k+1}-2}$$

©STEIN/LETTMANN 2023

Probabilistische Heuristiken

Asymptotische Verteilung von $C(N, p)$

Satz 102

Eine obere Schranke für die Laufzeit ist:

$$E(t(N, p)) = O(N)$$

©STEIN/LETTMANN 2023

Probabilistische Heuristiken

Heuristiken aus der Analyse von Stichproben

Beispiel: Wertesuche in Listen. Sei eine Liste L mit n verschiedenen, zufälligen reelen Zahlen gegeben: $(34.6, 11.5, 33.8, 5.4, 9.99, 1.4, 4.0 \ldots)$

- Algorithmus 1.
  Durchlaufen der Liste $\Rightarrow O(n), \Omega(n)$.
- Algorithmus 2.
  Es sei nun der maximale Wert X_m bekannt $\Rightarrow$ der Erwartungswert der Laufzeit liegt nun bei $\frac{n}{2}$
- Algorithmus 3.
  Nun soll nur ein Wert X in der $\epsilon-$Nachbarschaft um den maximalen Wert X_m gefunden werden ($|X - X_m| < \epsilon$). $p(X_m, \epsilon)$ sei die Wahrscheinlichkeit, dass ein Listenelement in $\epsilon-$Nachbarschaft um den maximalen Wert X_m liegt. Also ergibt sich der Erwartunsgwert der Laufzeit zu $\frac{1}{p(X_m,\epsilon)}$

©STEIN/LETTMANN 2023

Probabilistische Heuristiken

Heuristiken aus der Analyse von Stichproben (Fortsetzung)

Wenn die Listenelemente unabhängig sind und X eine kontinuierliche Zufallsvariable aus der Verteilung $F_X(x)$ ist, dann gilt für kleine ϵ:

$$\begin{aligned} p(X_m, \epsilon) &= P(X_m - \epsilon \leq X \leq X_m \mid X \leq X_m) \\ &= \frac{F_X(X_m) - F_X(X_m - \epsilon)}{F_X(X_m)} \\ &\approx \frac{F'_X(X_m)}{F_X(X_m)}\,\epsilon \end{aligned}$$

Die Menge der notwendigen Tests ergibt sich also zu:

$$\approx \frac{F_X(X_m)}{F'_X(X_m)}\,\frac{1}{\epsilon}$$

Dieses Ergebnis ist unabhängig von n.

©STEIN/LETTMANN 2023